Krummlinige orthogonale Koordinaten

Orthogonale Transformation

Koordinatentransformationen im R^3 werden beschrieben durch

$$\underline{x} = \underline{T}(\underline{u}),\ \underline{u} \in D \text{ mit } T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

$T : D \to G$ bildet $D \subset R^3$ auf $G \subset R^3$ ab.
T sei umkehrbar eindeutig und es gelte $\forall \underline{u} \in D$

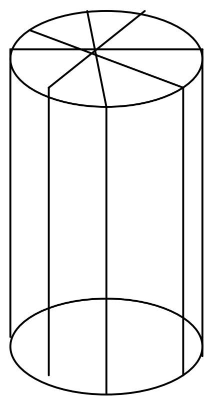
$\det(T') > 0$ und $\frac{\partial T}{\partial U_i} \bullet \frac{\partial T}{\partial U_j} = 0 \quad (i \neq j)$ $\leftarrow$ senkrecht aufeinander

Letzteres besagt, dass die Spalten von $\underline{T}'$ paarweise aufeinander stehen $\Rightarrow$ orthogonale Koordinatentrafo $\underline{T}'$

$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ seien die „altten" kartesischen Koordinaten und $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ seien die „neuen" krummlinigen Koordinaten. Die Kurve, die durch

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x} = \underline{T}(t, u_2, u_3) \\ \underline{x} = \underline{T}(u_1, t, u_3) \\ \underline{x} = \underline{T}(u_1, u_2, t) \end{array}\right\}, t$$ variabel, beschrieben werden, heißen Koordinatenlinien

Bsp. Zylinderkoordinaten



Die Vekoren $\underline{l}_i = \frac{\underline{T}_{u_i}}{|\underline{T}_{u_i}|}$ $(i = 1,2,3)$ $\left(\underline{T}_{u_i} = \frac{\partial \underline{T}}{\partial u_i}\right)$ bilden für jedes $\underline{u} \in D$ ein orthogonales Rechtssystem. (d.h. $\underline{l}_i - \underline{l}_j = \delta_{ij}$, $\det(\underline{l}_1, \underline{l}_2, \underline{l}_3) = 1$

Orthogonale Koordinatentransformation

$$\underline{x} = T(\underline{u}),\ u \in D \quad \underline{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

Vor: $\det(\nabla \underline{T}) > 0$ und $\frac{\partial T}{\partial U_i} \bullet \frac{\partial T}{\partial U_j} = 1 \quad (i \neq j)$

Die Vektoren $\underline{e}_i = \frac{\underline{T}u_i}{|\underline{T}u_i|}$ bilden für jedes $\underline{u} \in D$ ein orthogonales Rechtssystem.

$(T : D \to G$ bilden $D \subset R^3$ auf $G \subset R^3$ ab $)$

Felder in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

$\underline{v}: G \rightarrow R^3$, $\varphi: G \rightarrow R$
Vektorfeld Skalarfeld

Die Funktionsgleichungen $\underline{y} = \underline{v}(\underline{x})$, $\lambda = \varphi(\underline{x})$ werden durch $\underline{x} = \underline{T}(\underline{u})$ transformiert in

$\underline{y} = \underline{v}(\underline{T}(\underline{u})) =: \tilde{v}(u), \lambda = \varphi(\underline{T}(\underline{u})) =: \tilde{\varphi}(u)$

Für bel. $u \in D$ sei $(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \underline{\varphi}_3)$ ein orthogonales Rechtssystem. Damit lässt sich $\tilde{v}(\underline{u})$ als Linearkombination der $\underline{e}_i$ schreiben

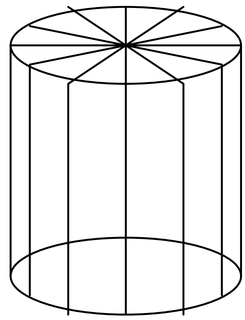
$$\tilde{\underline{v}}(\underline{u}) = v^1 \underline{e}_1 + v^2 \underline{e}_2 + v^3 \underline{e}_3 \quad \text{mit} \quad v^i = \tilde{\underline{v}} \underline{e}_1$$

Bem.: Man beachte, dass sowohl v^i als auch $\underline{e}_i$ von $\underline{u}$ abhängen!

Wir nennen v^1, v^2, v^3 die Koordinaten von $\underline{v}$ entlang der Koordinatenlinien.
Da sowohl v^i als auch $\underline{e}_i$ von $\underline{u}$ abhängen, erhält man die part. Ableitung mittels Produktregel.

$$\tilde{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \underline{e}_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_k} \tilde{v} = \sum_{i=1}^{3} \left(v^i_{Uk} \underline{e}_i + v^i \underline{e}_{i,Uk} \right)$$

Bsp.: Zylinderkoordinaten
Berechne die part. Abl. nach r, φ und z für die Vektoren $\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi . \underline{e}_z$ bei den Zylinderkoordinaten und $vx, y, z) = (y. -z, 1)^T$



$$(x, y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)^T = \underline{T}(r, \varphi, z)$$

$$\underline{T}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\underline{T}_r| = 1 \Rightarrow \underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T}_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\underline{T}_\varphi| = r \Rightarrow \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\underline{T}_z| = 1 \Rightarrow \underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}(r, \varphi, z) = v(T(r, \varphi, z)) = \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ -z \\ 1 \end{pmatrix} = v^r \underline{e}_r + v^\varphi \underline{e}_\varphi + v^z \underline{e}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ -z \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial r}\left(v^r \underline{e}_r + v^\varphi \underline{e}_\varphi + v^z \underline{e}_z\right) =$$

$$= v^r_r \underline{e}_r + v^r \underline{e}_{r,r} + v^\varphi_r \underline{e}_\varphi + v^\varphi \underline{e}_{\varphi,r} + v^z_r \underline{e}_z +$$

$$+ v^z \underline{e}_{z,r} = \sin\varphi\cos\varphi \underline{e}_r + (r\sin\varphi\cos\varphi)\cdot \underline{0} +$$

$$\left(-\sin^2\varphi\right)\cdot \underline{e}_\varphi + \left(-r\sin^2\varphi - z\cos\varphi\right)\cdot \underline{0} + 0\cdot \underline{e}_z +$$

$$+1\cdot \underline{0} = \sin\varphi\cos\varphi \underline{e}_r - \sin^2\varphi \underline{e}_\varphi =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos^2\varphi \\ \sin^2\varphi\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^3\varphi \\ -\sin^2\varphi\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}^r = \tilde{\underline{v}}(r,\varphi,z)\cdot \underline{e}^r = \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ -z \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= r\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\underline{v}^\varphi = -r\sin^2\varphi - z\cos\varphi$$

$$\underline{v}^z = 1$$

Differentialoperatoren $grad, div, rot, \Delta$ in krummlinigen Koordinaten

Wir verwenden obige Notation und $g_i := \left|\underline{T}_{u_i}\right|$

Betrachten wir $(grad\,\psi)\cdot \underline{e}_i$

Mit $\underline{x} = \underline{T}(\underline{u})$, $\frac{\partial x_k}{\partial u_i} = T_{k,u_i}$ ergibt sich

$$\otimes \quad (grad\,\psi)\cdot \underline{e}_i = (grad\,\psi)\cdot \frac{\underline{T}_{u_i}}{g_i} = \frac{1}{g_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_u}{\partial u_i} = \frac{1}{g_i}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial u_i}$$

Durchmultiplikation von $\otimes$ mit $\underline{e}_i$ liefert

$$grad\,\psi(x) = \frac{\underline{e}_1}{g_1}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial u_1} + \frac{\underline{e}_2}{g_2}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial u_2} + \frac{\underline{e}_3}{g_3}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial u_3}$$

symbolisch: $\nabla = \frac{\underline{e}_1}{g_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\underline{e}_2}{g_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\underline{e}_3}{g_3}\frac{\partial}{\partial u_3}$

Bsp.: Zylinderkoordinaten

Bestimme den Gradienten von $\tilde{\psi}(r,\varphi,z) = r^2 + z^2$

Es gilt $\psi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ und somit $\nabla\psi = 2(x,y,z)^T \Rightarrow \nabla\psi = 2\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

$$\nabla\psi = \underline{e}_r\cdot 2r + \frac{1}{r}\underline{e}_\varphi\cdot 0 + \underline{e}_z\cdot 2z = 2(r\underline{e}_r + z\underline{e}_z) =$$

$$= 2\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Setzen wir $u_1 = \varphi(x)0\left(T^{-1}\right)_1(x)$, so erhalten wir

$$\nabla u_1 = \frac{\underline{e}_1}{g_1}\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial u_1}}_{=1} + \frac{\underline{e}_2}{g_2}\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial u_2}}_{=0} + \frac{\underline{e}_3}{g_3}\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial u_3}}_{=0} = \frac{\underline{e}_1}{g_1}$$

$$\Rightarrow g_1 \nabla u_1 = \underline{e}_1 \left(al\lg.: g_i \nabla u_i = \underline{e}_i\right)$$

Man beachte nun

$$div\underline{v} = \nabla \cdot \underline{v} = \nabla \sum_{i=1}^{3} v^i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \nabla v^i \underline{e}_i$$

Mit $\underline{e}_i = \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = g_2 g_3 (\nabla u_2 \times \nabla u_3)$

Daraus folgt $\nabla\left(v^1 \underline{e}_1\right) = \nabla\left(g_2 g_3 v^1 (\nabla u_2 \times \nabla u_3)\right) =$

$$g_2 g_3 v^1 \underbrace{\nabla(\nabla u_2 \times \nabla u_3)}_{=0} + \underbrace{(\nabla u_2 \times \nabla u_3)}_{\underline{e}_1 / g_2 g_3} \nabla(g_2 g_3 v^1)$$

Es gilt $\nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) = \nabla u_3 \cdot (\nabla \times \nabla u_2) = \nabla u_2 (\nabla \times \nabla u_3) = 0$,

da $(\nabla \times \nabla u_i) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 - \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_1 - \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 - \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{pmatrix} u_i = 0$

Somit gilt $\nabla\left(v^1 \underline{e}_1\right) = \frac{1}{g_2 g_3} \underline{e}_i \nabla\left(g_2 g_3 v^1\right) \overset{\otimes}{=} \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial}{\partial u_i}\left(g_2 g_3 v^1\right)$

Entsprechendes gilt1 für $i = 2,3$

Somit gilt

$$div\underline{v}(\underline{x}) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left(g_2 g_3 v^1\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(g_2 g_3 v^2\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(g_2 g_3 v^3\right)\right)$$

Analoge Rechnung ergeben sich für rot und ∇.

<u>Satz:</u> Es gilt

$$grad\,\psi(x) = \frac{\underline{e}_1}{g_1}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_1} + \frac{\underline{e}_2}{g_2}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_2} + \frac{\underline{e}_3}{g_3}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_3}$$

$$div\underline{v}(\underline{x}) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left(g_2 g_3 v^1\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(g_1 g_3 v^2\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(g_1 g_2 v^3\right)\right)$$

$$rot\underline{v}(\underline{x}) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\begin{vmatrix} g_1 \underline{e}_1 & g_2 \underline{e}_2 & g_3 \underline{e}_3 \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ g_1 v^1 & g_2 v^2 & g_3 v^3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta \psi(x) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{g_1 g_2 g_3}{g_i^{\ 2}}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_i}\right)$$

$grad, div, rot, \Delta$ für Zylinderkoordinaten

$$(x,y,z)=(r\cos\varphi.r\sin\varphi,z)$$

$$\underline{e}_r=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\quad \underline{e}_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\quad \underline{e}_z=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\psi(x)=\tilde{\psi}(r,\varphi,z)\qquad \underline{v}(\underline{x})=v^r\,\underline{e}_r+v^\varphi\,\underline{e}_\varphi+v^z\,\underline{e}_z$$

$$grad\,\psi(x)=\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r}\underline{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\varphi}\underline{e}_\varphi+\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial z}\underline{e}_z$$

$$div(\underline{v}(\underline{x}))=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rv^r\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}v^\varphi+\frac{\partial v^z}{\partial z}$$

$$\Delta\psi(x)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial z^2}$$

$$rot(\underline{v}(\underline{x}))=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\underline{e}_r & r\underline{e}_\varphi & \underline{e}_z\\ \partial/\partial r & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z\\ v^r & rv^\varphi & v^z\end{vmatrix}$$

Kugelkoordinaten: $x=r\sin\Theta\cos\varphi$
$y=r\sin\Theta\sin\varphi$
$z=r\cos\Theta$

$$\underline{T}_r=\begin{pmatrix}\sin\Theta\cos\varphi\\ \sin\Theta\sin\varphi\\ \cos\Theta\end{pmatrix}\qquad |\underline{T}_r|^2=\sin^2\Theta\cos^2\varphi+\sin^2\Theta\sin^2\varphi+\cos^2\Theta=1$$

$$\underline{T}_\Theta=\begin{pmatrix}r\cos\Theta\cos\varphi\\ r\cos\Theta\sin\varphi\\ -r\sin\Theta\end{pmatrix}\qquad |\underline{T}_\Theta|^2=r^2\left(\cos^2\Theta\cos^2\varphi+\cos^2\Theta\sin^2\varphi+\sin^2\Theta\right)=r^2$$

$$\underline{T}_\varphi=\begin{pmatrix}-r\sin\Theta\sin\varphi\\ r\sin\Theta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\qquad |\underline{T}_\varphi|^2=r^2\left(\sin^2\Theta\sin^2\varphi+\sin^2\Theta\cos^2\varphi\right)=r^2\sin^2\Theta$$

$$\Rightarrow\ \underline{e}_r=\underline{T}_r,\quad \underline{e}_\Theta=\begin{pmatrix}\cos\Theta\cos\varphi\\ \cos\Theta\sin\varphi\\ -\sin\Theta\end{pmatrix},\quad \underline{e}_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$grad\,\psi(x)=\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r}\underline{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\Theta}\underline{e}_\Theta+\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\varphi}\underline{e}_\varphi$$

$$div\,\underline{v}(\underline{x})=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2v^r\right)+\frac{1}{r\sin\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta v^\Theta\right)+\frac{\partial v^\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

$$rot\underline{v}(\underline{x}) = \frac{1}{r^2 \sin\Theta} \begin{vmatrix} \underline{e}_r & r\underline{e}_\Theta & r\sin\Theta \underline{e}_\varphi \\ \partial / \partial r & \partial / \partial \Theta & \partial / \partial \varphi \\ v^r & rv^\Theta & r\sin\Theta v^\varphi \end{vmatrix}$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial\varphi^2}$$

Definition kartesischer Tensoren

Physikalische Gesetze sind unabhängig von den Koordinatensystemen, d.h. ihre Formulierung bleibt unverändert bei dem Wechsel von einem rechtsorientierten kartesischen Koordinatensystem zu einem anderen.

$\Rightarrow$ vektoren, Tensoren mit denen physikalische Größen beschrieben werden, haben Invarianzeigenschaften beim Koordinatenwechsel

Transformation durch Drehung

(b_1, b_2, b_3) (b_1', b_2', b_3') seien zwei rechtsorientierte Orthonormalbase.

$\left(b_i \cdot b_k = \delta_{ik}, \det(b_1, b_2, b_3) = 1\right)$

$\otimes$ $\quad \underline{x} = \xi_1 \underline{b}_1 + \xi_2 \underline{b}_2 + \xi_3 \underline{b}_3$, $\quad \xi_k = \underline{b}_k \cdot \underline{x}$

$\otimes\otimes$ $\quad \underline{x} = \xi_1' b_1' + \xi_2' b_2' + \xi_3' b_3'$, $\quad \xi_k' = \underline{b}_k' \cdot \underline{x}$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind die Koordinaten von $\underline{x}$ bezüglich der Basis (b_1, b_2, b_3). Das zugehörige Koordinatensystem sei mit $0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ bezeichnet.

Setzt man $\underline{x}$ aus $\otimes$ in $\xi_k' = b_k' \cdot \underline{x}$ ein, so gilt

$$\xi_k' = \xi_1 \cdot b_k' \cdot b_1 + \xi_2 \cdot b_k' \cdot b_2 + \xi_3 \cdot b_k' \cdot b_3$$

bzw. analog $\underline{x}$ aus $\otimes\otimes$ in $\xi_k = \underline{b}_k \cdot x$:

$$\xi_k = \xi_1' \cdot b_k \cdot b_1' + \xi_2' \cdot b_k \cdot b_2' + \xi_3' \cdot b_k \cdot b_3'$$

Für $k = 1,2,3$ erhält man:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{b}_1' \underline{b}_1 & \underline{b}_1' \underline{b}_2 & \underline{b}_1' \underline{b}_3 \\ \underline{b}_2' \underline{b}_1 & \underline{b}_2' \underline{b}_2 & \underline{b}_2' \underline{b}_3 \\ \underline{b}_3' \underline{b}_1 & \underline{b}_3' \underline{b}_2 & \underline{b}_3' \underline{b}_3 \end{pmatrix}}_{} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

$:= A$ mit $a_{ij} = \underline{b}_i' \cdot b_j$

Führt man folgende Matrizen und Vektoren ein:

$$B = \left(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\right), \quad B' = \left(\underline{b}_1', \underline{b}_2', \underline{b}_3'\right)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \qquad \xi' = \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{pmatrix}$$

so lauten obige Gleichungen:

$$\underline{x} = B \cdot \underline{\xi} \qquad \underline{\xi} = B^T \cdot \underline{x} \qquad \left(= B^T B' \underline{\xi}' = B^T B \underline{\xi}\right)$$

$$\underline{x} = B' \cdot \underline{\xi}' \qquad \underline{\xi} = B'^T \cdot \underline{x}' \qquad \left(= B'^T B \underline{\xi} = B'^T B' \underline{\xi}'\right)$$

$\xi' = A \cdot \xi$ mit $A = B'^T \cdot B$, $\xi = A^T \xi'$

A heißt Transformationsmatrix. Für B gilt: $B^T B = I$

$\Rightarrow B^T = B^{-1}$ und $\det B = 1$, [da $\det\left(B^T B\right) = I$], und $B \cdot B^T = 1$

Damit folgt für die Matrix A:

$$A \cdot A^T = (B'^T \cdot B)(B^T \cdot B') = B'^T \cdot B' = I$$
$$A^T \cdot A = (B'^T \cdot B')(B'^T \cdot B) = B^T \cdot B = I$$

und somit

$A^{-1} = A^T$ und $\det(A) = 1$

A ist also eine Drehmatrix, welche eine Drehung des k-Systems $0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ in $0, \xi_1', \xi_2', \xi_3'$ bewirkt.

Tensoren zweiter Stufe

Es sei $I: R^3 \to R^3$ eine beliebige lineare Abbildung des R^3 in sich. Bekanntlich läßt sich eine solche Abb. Bzgl. eines bel. Koordinatensystems $0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ mit Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ als Matrix

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$ darstellen.

Die Funktionengleichung $\underline{y} = T(\underline{x})$ wird durch $\eta = T\underline{\xi}$ beschrieben, wobei $\underline{x} = \sum_{k=1}^{3} \xi_k \underline{b}_k$,

$\underline{y} = \sum_{k=1}^{3} \eta_k \underline{b}_k$ gilt.

Definition: Ein Tensor zweiter Stufe ist die Menge von Matrizen $T = (t_{ik})_B$ zu einer linearen Abb. $I: R^3 \to R^3$, und zwar für alle rechtsorientierten Orthonormalbasen B des R^3.

Betrachten wir den Übergang von zwei Matrizen $T = (t_{ik})_B$, $T' = (t'_{ik})_B$.
Es gilt:

$$\underline{\eta} = T \cdot \underline{\xi}\,,\quad \underline{\eta}' = T' \cdot \underline{\xi}' \quad \text{mit} \quad \underline{\xi}' = A \cdot \underline{\xi}\,,\quad \underline{\eta}' = A \cdot \underline{\eta}$$

Einsetzen liefert:

$$\underline{\eta}' = T'\underline{\xi}' \Rightarrow A \cdot \underline{\eta} = T' \cdot A \cdot \underline{\xi} \Rightarrow \underline{\eta} = A^T \cdot T' \cdot A \cdot \underline{\xi} \Rightarrow T = A^T \cdot T' \cdot A$$

Umgeschrieben lautet dies:

$T' = A \cdot T \cdot A^T$, d.h. $t'_{\underline{ik}} = \sum_{pq=1}^{3} a_{ip} \cdot t_{pq} \cdot a_{kq} = \sum_{pq} a_{\underline{i}\underline{\underline{p}}} \cdot a_{\underline{k}\underline{\underline{q}}} \cdot t_{\underline{\underline{pq}}}$

Tensoren n-ter Stufe

Ein n-ter Stufe $(n \in N)$ wird bzgl. des Koordinatensystems $0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ durch B^n reele Zahlen

$t_{ij\ldots k}$ (mit n Indizes $i, j, \ldots, k \in \{1,2,3\}$)

dargestellt. Wir beschreiben das System dieser Zahlen auch durch $T = (t_{ij\ldots k})_B$.

Bzgl. eines anderen k-Systems $0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ mit rechtsorientierter Basis B' wird der Tensor durch $T' = (t'_{ij\ldots k})_{B'}$ dargestellt, wobei sich die $t'_{ij\ldots k}$ durch

$\otimes\ t'_{ij\ldots k} = \sum_{pq,\ldots,r} a_{ip} \cdot a_{iq} \cdot \ldots \cdot a_{kT} \quad t_{pq\ldots r}$ ergeben, wobei $A = B'^T B$

Definition: Kartesische Tensoren im R^3

a) Ein Schema von reellen Zahlen $t_{ij\ldots k}$ (mit n Indizes $i, j, \ldots, k \in \{1,2,3\}$) welches wir mit einer rechtsorientierten Orthonormalbasis B des R^3 zu einem Paar verbinden, schreiben wir in der Form $T = (t_{ij\ldots k})_B$. Ist $T' = (t'_{ij\ldots k})_{B'}$ ein zweites Paar dieser Art, wobei der Zusammenhang $\otimes$ besteht, so heißen T und T' aquvivalent.

b) Eine Äquivalenzklasse solcher Ausdrücke T heißt ein (kartesischer) Tensor n-ter Stufe.

Einsteinsche Summenkonvention

Tritt bei einer indizierten Größe oder einem Produkt solcher Größen ein Index doppelt auf, so wird über alle möglichen Werte dieses Index summiert.

Die Gleichungen $\underline{x} = \sum_{k=1}^{3} \xi_k b_k$, $t'_{ik} = \sum_{pq=1}^{3} a_{ip} a_{kp} t_{pq}$ erhalten somit folgende prägnante Form:

$\underline{x} = \xi_k b_k \qquad t_{ik} = a_{ip} a_{kp} t_{pq}$

All Konvention

Tritt in einem Summanden einer Tensorgleichung ein Index genau einmal auf, so gilt diese für alle Werte des Index.

Rechenregeln für Tensoren

Seien durch $T = (t_{ik\ldots n})_B$, $S = (S_{ik\ldots n})_B$ zwei Tensoren n-ter Stufe dargestellt, und $\lambda \in R$.

$$T + S = (t_{ik\ldots n} + S_{ik\ldots n})_B$$
$$S - T := S + (-T)$$
$$\lambda \cdot T = (\lambda \cdot t_{ik\ldots n})_B$$
$$-T = (-t_{ik\ldots n})_B$$

Tensoren gleicher Stufe erfüllen die Gesetze eines Vektorraums.

Assoziativgesetze: $(T + S) + V = T + (S + V)$

$(\lambda \cdot \mu) \cdot T = \lambda \cdot (\mu \cdot T)$

Kommutativgesetz: $T + s = S + T$

Distributivgesetz: $\lambda(T + S) = \lambda T + \lambda S$

$(\lambda + \mu)T = \lambda T + \mu T$

sowie: $T + 0 = T$, $T - T = 0$, $1 \cdot T = T$

sei $T=(t_{i...k})_B$ Tensor n-ter Stufe und $S=(S_{p...q})_B$ Tensor m-ter Stufe. Das Tensorprodukt $T\cdot S=W=(W_{i...kp...q})_B$ ist definiert durch $W_{i...kp...q}=t_{i...k}\cdot S_{p...q}$. Das Produkt ist von der Ordnung $n+m$.

Symmetrie und Antisymmetrie

Ein Tensor T der Stufe 2, mit $T=(t_{ik})_B$ heißt symmetrisch, wenn $t_{ki}=t_{ik}$ für alle i,k gilt und antisymmetrisch, wenn $t_{ki}=-t_{ik}$ für alle i,k gilt.

sysmmtrischer Tensor	antisymmetrischer Tensor
$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$	$T=\begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 \end{pmatrix}$

Folgerung: Jeder Tensor der Stufe 2 läßt sich in eine Summe aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Tensor zerlegen. Dies hat die Darstellung

$$t_{ik}=\frac{1}{2}(t_{ik}+t_{ki})+\frac{1}{2}(t_{ik}-t_{ki}).$$

<u>Verjüngung:</u>
$T=\left[t_{ij...k}\right]_B$ sei ein Tensor. Setzt man in $t_{ij...k}$ zwei Indizes gleich und summiert über diesen gemeinsamen Index, so erhält man einen neuen Tensor T_0.
Man nennt diesen Tensor eine Verjüngung, z.B.

$$T=\left[t_{ij}\right]_B \rightarrow T_0=\left[t_{iik}\right]_B=\left[\bar{t}_k\right]_B \text{ mit } \bar{t}_k=t_{iik}=\sum_{i=1}^{3} t_{iik}$$

Bei der Verjüngung verringert sich der Grad um 2.

<u>Divisionsregel:</u>
Wir betrachten eine Abbildung der Tensoren S m-ter Stufe in der Menge der Tensoren T n-ter Stufe, die folgendermaßen beschrieben wird

$$t_{i...k}=w_{i...kp...q}s_{p...q} \text{ mit } T=(t_{i...k})_B\in\underline{T} \text{ und } S(s_{p..q})_B\in\underline{S}$$

Damit folgt:
Die Schemata $\left(w_{i...kp...q}s_{p...q}\right)_B$ bilden einen Tensor der Stufe $(m+n)$.

<u>Invariante Tensoren:</u>
Ein Tensor U heißt invariant, wenn er bezüglich aller rechtsorientierten Orthogonalbasen B das gleiche Zahlenschema $\left[u_{i...k}\right]_B$ aufweist.

<u>Genauer:</u>
Sind $(u_{i...k})_B$, $(u'_{i...k})_{B'}$ zwei Repräsentanten des Tensors T, so gilt $u_{i...k}=u'_{i...k}$ für jede Kombination von $i...k$.

Deltatensor:
Der wichtigste Tensor 2.Stufe ist der Deltatensor E der Stufe 2, der durch $(\delta_{ik})_B$ repräsentiert wird mit $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, falls \quad i = k \\ 0, sonst \end{cases}$

Epsilontensor:
Betrachten wir die Permutationen der Zahlen $1,2,3$.
Es gibt $3! = 6$ Permutationen. Diese sind
$(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ gerade Permutationen (gerade Anzahl an Vertauschungen)
$(2,1,3),(1,3,2),(3,2,1)$ ungerade Permutation

Damit wird das Symbol ε_{ijk} wie folgt definiert

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & wenn\ miendestens\ zwei\ Indizes\ gleich\ \sin d \\ 1, & wenn\ (i,j,k)\ eine\ gerade\ Permutation\ ist \\ -1, & wenn\ (i,j,k)\ eine\ ungerade\ Permutation\ ist \end{cases}$$

Der ε-Tensor ist ein invarianter Tensor 3.Stufe

Folgerung: Zusammenhang zwischen Delta- und Epsilontensor.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rsk} = \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}$$

Folgerung: Epsilontensor und Kreuzprodukt
Es seien $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ und $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ zwei Vektoren des R^3. Die Komponenten des Kreuzprodukts $a \times b$ werden durch $(a \times b)_i \ (i = 1,2,3)$ beschrieben, insbesondere gilt:

$$(a \times b)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k = -\varepsilon_{ikj} a_j b_k = -\varepsilon_{ijk} b_j a_k = -(b \times a)_i$$

Ersetzt man $\underline{a}$ durch den $\nabla-$Operator, so gilt

$$(rot\underline{v})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

Satz: Jeder invariante Tensor 4.Stufe mit dem einheitlichen Repräsentanten $(u_{ijkm})_B$ lässt sich i folgender Form schreiben

$$u_{ijkm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{km} + \mu\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk} \qquad (\lambda, \mu, \nu \in R)$$

Bsp.:Lineare Elastizitätstheorie

Durch ε_{ik} sei der Verzerrungstensor bei kleinen Dehnungen eines elastischen Körpers beschrieben und durch σ_{ik} der dadurch erzeugte Spannungstensor. Es sei hier ein isotroper und homogener Körper betrachtet. Der lineare Zusammenhang der beiden Größen δ_{ik} und δ_{ik} lässt sich beschreiben durch

$$\sigma_{ik} = u_{ikpq}\varepsilon_{pq} \qquad \otimes$$

Der Tensor $U = (u_{ikpq})_B$ spiegelt eine Materialeigenschaft wieder

Da Material isotrop ist, hat U die Darstellung

$$u_{ikpq} = \lambda\delta_{ik}\delta_{pq} + \mu\delta_{ip}\delta_{uq} + \nu\delta_{iq}\delta_{kp}$$

Einsetzen in $\otimes$ liefert

$$\sigma_{ik} = \lambda\delta_{ik}\delta_{pq}\varepsilon_{pq} + \mu\delta_{ip}\delta_{kq}\varepsilon_{pq} + \nu\delta_{iq}\delta_{kp}\varepsilon_{pq} = \lambda\delta_{ik}\varepsilon_{pp} + \mu\varepsilon_{ik} + \nu\varepsilon_{ki}$$

Da Spannungs- und Verzerrungstensor sym. sind, ergibt sich, dass

$$\sigma_{ik} = \lambda\delta_{ik}\varepsilon_{pp} + (\mu + \nu)\varepsilon_{ik}$$

Mit in der Technik üblichen Konstantenbezeichnungen G und m, die mit λ, μ, ν wie folgt zusammenhängen

$$\lambda G = \mu + \nu\,, \quad \lambda = \frac{2G}{m-2}\,, \quad m > 2$$

Damit folgt das Hooksche-Dehnungsgesetz

$$\sigma_{ik} = 2G\left(\frac{\varepsilon_{pq}\delta_{ik}}{m-2} + \varepsilon_{ik}\right)$$

Tensoranalysis

M sei eine offene Teilmenge des R^3. Eine Abb. $\underline{F}$ von M in der Menge der Tensoren n-ter Stufe bezeichnen wir als Tensorfeld.
Wir beschreiben das Tensorfeld durch

$$\underline{T} = \underline{F}(x)\,, \quad x \in M$$

oder mit Hilfe eines Repräsentanten $T = (t_{ij\ldots k})_B$, $F(x) = \left(f_{ij\ldots k}(x)\right)_B$ auch durch $T = F(x)$ in Komponenten $t_{ij\ldots k} = f_{ij\ldots k}(x)$
Die Ableitung der $t_{ij\ldots k} = f_{ij\ldots k}(x)$ nach $\underline{x} = \underline{\xi}_i \underline{b}_i$
$B = (b_1 b_2 b_3)$ werden folgendermaßen symbolisiert

$$\frac{\partial t_{ij\ldots k}(x)}{\partial \xi_p} =: t_{ij\ldots k,p}\,, \quad \frac{\partial^2 t_{ij\ldots k}(x)}{\partial \xi_p \partial \xi_q} =: t_{ij\ldots k,pq} \quad \text{usw.}$$

<u>Satz:</u> Es sei $\underline{F}$ ein stetig diffb. Tensorfeld n-ter Stufe auf einer offenen Menge $M \subset R^3$, beschrieben durch $t_{ij\ldots k} = f_{ij\ldots k}(x)$ mit $\underline{x} = \underline{\xi}_i \underline{b}_i$, $B = (b_1 b_2 b_3)$

Dann bilden die Schemata der partiellen Ableitung

$$(t_{ij\ldots k}, p)_B \qquad i, j, \ldots, k, p \in \{1,2,3\}$$

einen Tensor (n+1)-Stufe

<u>Fundamentalsatz der Feldtheorie:</u>

Durch p - malige Differentation eines Tensors wird dessen Stuffe um p erhöht.