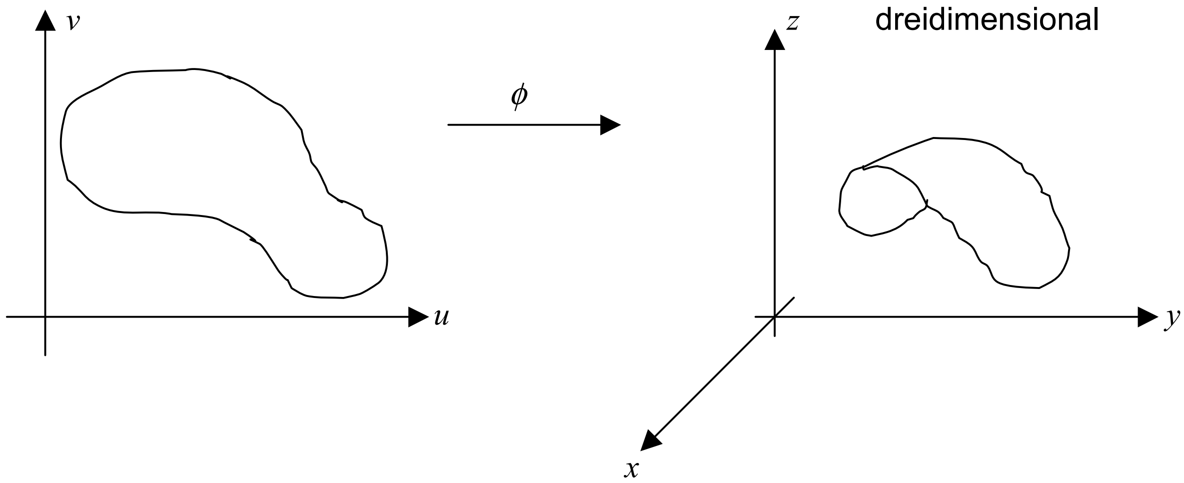
IV Flächen und Flächenintegrale

Unter Flächen stellen wir uns dünne Platten vor, die auch verbogen sein dürfen



Definition: Es sei $D \subset R^2$ offen und messbar (d.h. wohl def. Flächeninhalt). Unter einem Flächenstück versteht man den Wertebereich einer stetig diffb. Abb. $\phi : \overline{D} \to R^3$. Dabei wird vorausgesetzt, dass $rang(\nabla \phi(u,v)) = 2$ $((u,v) \in D)$.Die Abbildung ϕ, wie auch ihre Funktionsgleichung $\underline{x} = \underline{\phi}(u,v)$ nennt man eine Parameterdarstellung des Flächenstücks oder auch Flächendarstellung.
u, v heißen die Parameter des Flächenstücks und $\overline{D}$ der zugehörige Parameterbereich.

Die Parameterdarstellung $\underline{x} = \underline{\phi}(u,v)$ erhält mit den Komponentendarstellung

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \underline{\phi}(u,v) = \begin{pmatrix} \overline{x}(u,v) \\ \overline{y}(u,v) \\ \overline{z}(u,v) \end{pmatrix}$$

die explizite Form

$$\overline{x}(u,v)$$
$$\overline{y}(u,v) \qquad \text{sowie: } \underline{\phi}(u,v) = \begin{pmatrix} \overline{x}_u & \overline{x}_v \\ \overline{y}_u & \overline{y}_v \\ \overline{z}_u & \overline{z}_u \end{pmatrix}$$
$$\overline{z}(u,v)$$

$$\underbrace{\underline{\phi}_u}_{1.Abl.} = \begin{pmatrix} \overline{x}_u \\ \overline{y}_u \\ \overline{z}_u \end{pmatrix}, \underbrace{\underline{\phi}_v}_{1.Abl.} = \begin{pmatrix} \overline{x}_v \\ \overline{y}_v \\ \overline{z}_v \end{pmatrix}$$

Nach Def. hat $\nabla \underline{\phi}(u,v)$ in D den $Rang\ 2$, d.h. $\underline{\phi}_u$ und $\underline{\phi}_v$ sind $\forall\ (u,v) \in D$ linear abhängig.
Somit gilt

$$\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v \neq 0 \text{ in } D$$

Die von $\underline{\phi}_u$ und $\underline{\phi}_v$ aufgespannte Ebene durch den Flächenpunkt $\underline{\phi}(u,v)$ ist die Tangentenebene mit der Parameterdarstellung

$$\underline{x} = \underline{\phi}(u,v) + \lambda \underline{\phi}_u(u,v) + \mu \underline{\phi}_v(u,v) \qquad (\lambda, \mu \in R)$$

und

$$\underline{x} = \lambda \underline{\phi}_u(u,v) = \lambda \underline{\phi}_v(u,v)$$

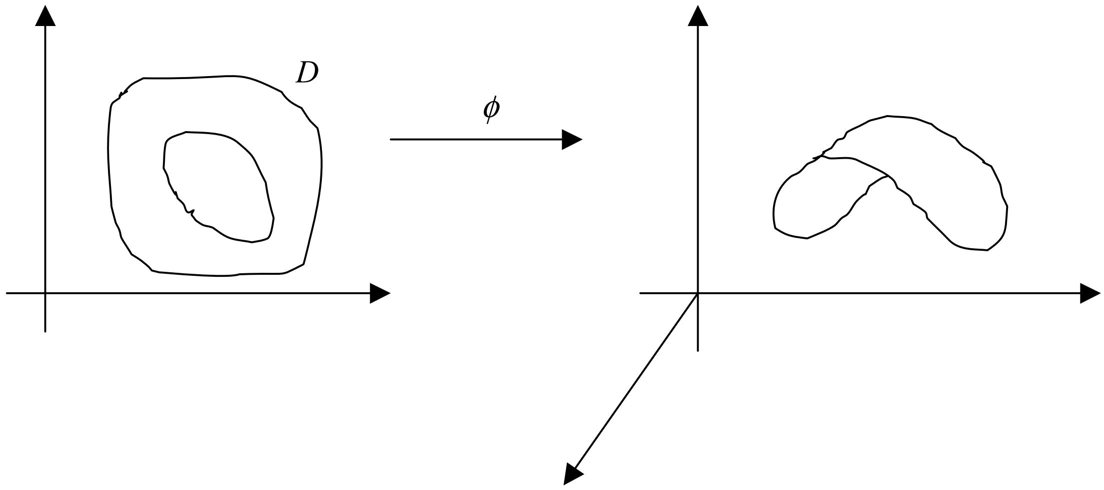
nennt man Tangentialebene.

Der auf der Tangenten- und Tangentialebene von $\underline{\phi}(u,v)$ senkrecht stehende Einheitsvektor

$$n = \frac{\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_V}{\left|\underline{\phi}_u + \underline{\phi}_V\right|}$$

heißt Flächennormale.

Für ein reguläres Kurvenstück $\Gamma(t) = (u(t), v(t))$ $t \in [a,b]$ im Parameterbereich D ist das Bild $\gamma(t) = \phi(\Gamma(t))$ eine reguläre Flächenkurve, deren Tangentenvektor $\dot{\gamma}(t) = \underline{\phi}_u \dot{u} + \underline{\phi}_v \dot{v}$ In der Tangentenebene liegt.



Die Bogenlänge $s(t) = \int_a^t \left|\dot{\gamma}(t)\right| dt$ ergibt sich

$$\left|\dot{\gamma}\right|^2 = \left(\underline{\phi}_u \dot{u} + \underline{\phi}_v \dot{v}\right)^T \left(\underline{\phi}_u \dot{u} + \underline{\phi}_v \dot{v}\right) = \left(\underbrace{\underline{\phi}_u + \underline{\phi}_v}_{=E}\right)\dot{u} + 2\left(\underbrace{\underline{\phi}_u + \underline{\phi}_v}_{=F}\right)\dot{u}\dot{v} + \left(\underbrace{\underline{\phi}_u + \underline{\phi}_v}_{=G}\right)\dot{v}\dot{v}$$

<u>Beispiel:</u> $\underline{\phi}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ g(u,v) \end{pmatrix}, \nabla \phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g_u(u,v) & g_v(u,v) \end{pmatrix}$

$$\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v = \begin{pmatrix} -g_u \\ -g_v \\ 1 \end{pmatrix}, n = \frac{1}{\sqrt{1 + g_u^2 + g_v^2}} \begin{pmatrix} -g_u \\ -g_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E = 1 + g_u^2, f = g_u \cdot g_v, G = 1 + g_v^2$$

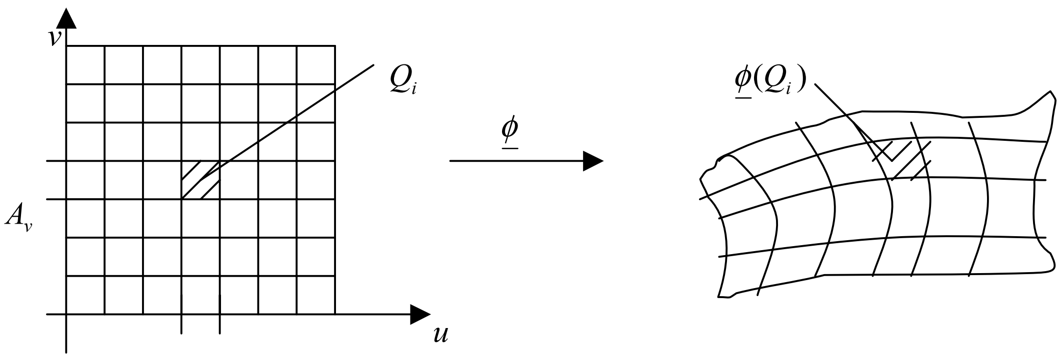
Flächenintegrale

Ein Flächenstück F bezeichnet wir als doppelpunktfrei, wen es mit einer Parameterdarstellung $\phi : \overline{D} \to R^3$ beschrieben werden kann, die eineindeutig ist auf ganz D.

Flächeninhalt

Motivation: Es sei $F : \phi : \overline{D} \to R^3$ ein doppelpunktfreies Flächenstück.

Der Einfachheit nehmen wir an, dass D ein achsenparalleles Rechteck sei



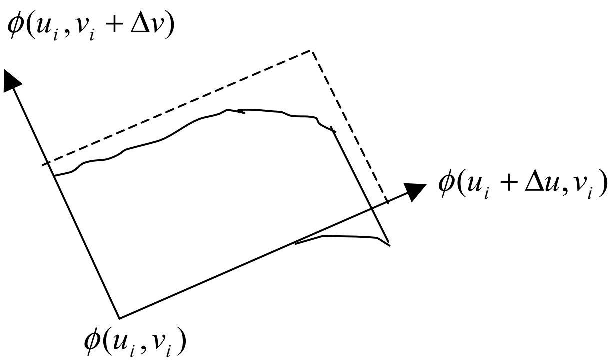
$\overline{D}$ sei in Teilrechtecke $Q_1,...,Q_m$ zerlegt. Wenn Rechteckzerlegung fein genug ist, haben $\underline{\phi}(Q_i)$ Parallelogrammgestalt. Ist Q_i ein Teilrechteck in $\overline{D}$ mit den Seitenlängen Δu und Δv und $\underline{u}_i = (u_i, v_i)$ sei der linke untere Eckpunkt von Q_i, so hat $\phi(Q_i)$ beinahe die Gestalt des Parallelogramms, welches von

$$\phi(u_i + \Delta u, v_i) - \phi(u, v)$$

und

$$\phi(u_i, v_i + \Delta v) - \phi(u, v)$$

aufgespannt wird.



Die Vektoren sind ungefähr $\underline{\phi}_u(u_i, v_i)\Delta u$ bzw. $\underline{\phi}_v(u_i, v_i)\Delta v$ Für den angenährten Flächeninhalt $|\Delta\delta_i|$ von $\underline{\phi}(Q_i)$ gilt

$$|\Delta\delta_i| = \left|\underline{\phi_u(u_i, v_i) \times \phi_v(u_i, v_i)}\right| \Delta u \Delta v$$

Als Näherung für den Flächeninhalt von F erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{m} \left| \underline{\phi_u(u_i, v_i) \times \phi_v(u_i, v_i)} \right| \Delta u \Delta v \quad \otimes$$

Wir sind also motiviert in $\otimes$ $(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2$ gegen Null streben zu lassen und so zum Integral über zu gehen.

Definition: Als Flächeninhalt eines doppelpunktfreien Flächenstücks $F : \phi : D \to R^2$ definieren wir die Zahl

$$A(F) = \int_F 1 d\delta = \int_D \left| \underline{\phi}_u(u,v) \times \underline{\phi}_v(u,v) \right| d(u,v)$$

Der Ausdruck $d\delta = \left| \underline{\phi}_u(u,v) \times \underline{\phi}_v(u,v) \right| d(u,v)$ wird gelegentlich als Flächenelement bezeichnet.

<u>Bsp.:</u> Kugeloberfläche

$$K : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\delta \\ r\sin\varphi c\cos\delta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \varphi \in [0, 2\pi] \qquad \delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$A(K) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \underline{\phi}_\varphi(\varphi,\delta) \times \underline{\phi}_\delta(\varphi,\delta) \right| d\delta d\varphi$$

$$= \iint \left| \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\cos\delta \\ r\cos\varphi\cos\delta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\cos\varphi\sin\delta \\ -r\sin\varphi\sin\delta \\ r\cos\delta \end{pmatrix} \right| d\delta d\varphi$$

$$= \iint \left| \begin{matrix} -r^2\cos\varphi\cos^2\delta \\ r\sin\varphi\cos^2\delta \\ r^2\sin\delta\cos\delta \end{matrix} \right| d\delta d\varphi = r^2 \iint \left(\cos^4\delta + \sin^2\delta\cos^2\delta \right)^{\frac{1}{2}} d\delta d\varphi$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos\delta| d\delta d\varphi = 4\pi r^2$$

Oberflächenintegral einer skalaren Funktion

Definition: Es sei $F : \underline{\phi} : \overline{D} \to R^3$ ein Flächenstück und $f : S \to R$ mit $F \subset S \subset R^3$ eine stetige Funktion. Dann bezeichnet man

$$\int_F f(x)d\delta := \int_D f(\phi(u,v)) \left| \underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v \right|_{(u,v)} d(u,v)$$

als Oberflächenintegral von f über F.

Motivation: $\overline{D}$ sei der Einfachheit wegen als Rechteck vorausgesetzt. Wie bei Flächenberechnungen sei es in Rechtecke $Q_1,...,Q_m$ zerlegt. Damit ist F in „Maschen" $f(Q_i)$ aufgeteilt.

Der Flächeninhalt einer Masche ist ungefähr

$$\Delta\delta_i := \left| \underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v \right|_{(u,v)} \Delta u \Delta v$$

$(u_i, v_i) \in Q_i$, Δu, Δv Kantenlängen von Q_i

Folglich liefert die Summation über $i = 1,...,n$ von

$$f(\underline{\phi}(u_i, v_i)) \cdot \Delta\delta_i$$

und anschließender Übergang zum Integral das Oberflächenintegral in der Form $\int_F f(x)d\delta$

Bsp.: Auf der Einheitskugel mit der Oberfläche

$$k : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\delta \\ r\sin\varphi\cos\delta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \varphi \in [0,2\pi], \delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

sei eine Ladungsdichte $f(x,y,z) = z^2$ gegeben.

Wie groß ist die Gesamtladung?

- Parametrisierung von k? (gegeben durch Aufgabenstellung)
- Bestimmen von „$\underline{\phi}_u, \underline{\phi}_v$" und $\left| \underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v \right|$

$$\underline{\phi}(\varphi,\delta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\delta \\ r\sin\varphi\cos\delta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

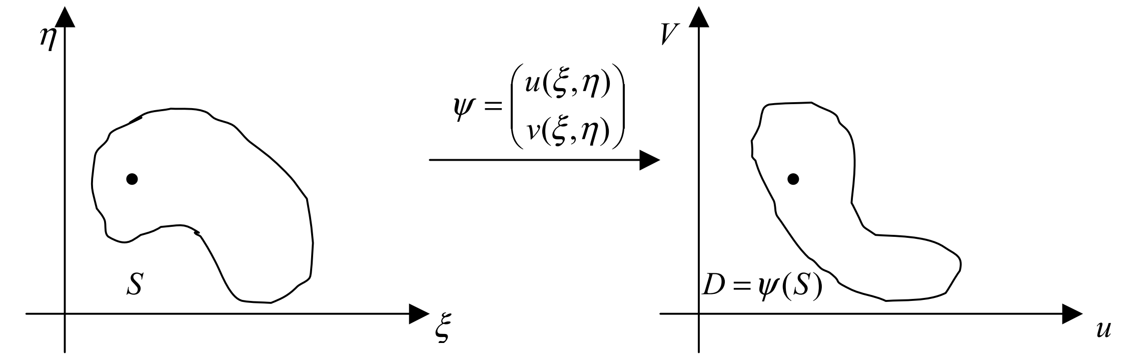
$$\left| \underline{\phi}_\varphi \times \underline{\phi}_\delta \right| = r^2 \left|\cos\delta\right|$$ (s. letztes Bsp. „Berechnung der Kugeloberfläche")

- Parameterintegral berechnen

$$\int_K f(x)d\delta = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\underline{\phi}(\varphi,\delta)) \cdot \left| \underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v \right| d\delta d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2\delta \left|\cos\delta\right| d\delta d\varphi$$

$$= r^4 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2\delta \cos\delta d\delta = 2r^4\pi \cdot \left[\frac{\sin^3\delta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2^4\pi \cdot \frac{2}{3}$$

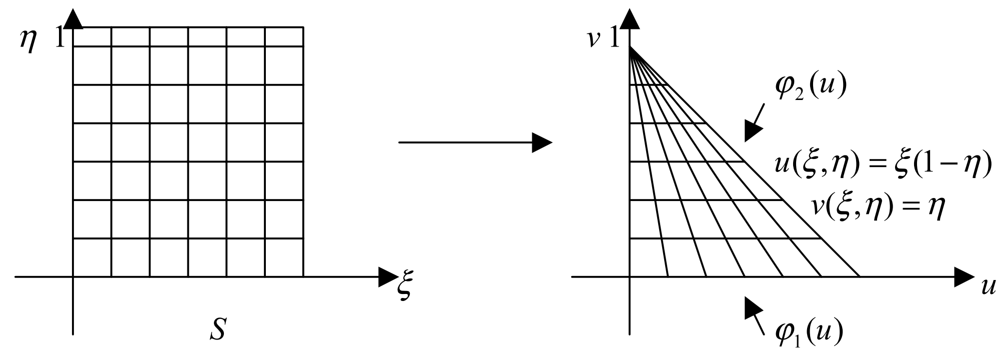
Transformationsformel für Gebietsintegral



Es gilt für stetige Skalarfelder f die Transformationsformel

$$\int_D f(u,v)\,d(u,v) = \int_S f\big(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\big)\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \dfrac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \dfrac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} d(\xi,\eta)$$

Bsp.:



Sei $f(u,v) = u^2$

$$\int_D f(u,v)\,d(u,v) = \int_0^1\int_0^{1-u} u^2\,dv\,du = \int_0^1 (1-u)u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

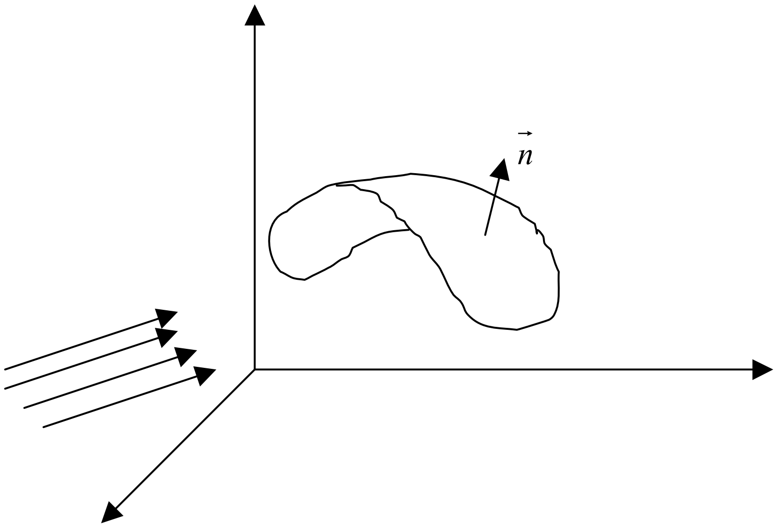
$$\int_D f(u,v)\,d(u,v) = \int_S f\big(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\big)\begin{vmatrix} 1-\eta & -\xi \\ 0 & 1 \end{vmatrix} d(\xi,\eta) =$$

$$= \int_S \xi^2(1-\eta)^2(1-\eta)\,d(\xi,\eta) = \int_0^1\int_0^1 \xi^2(1-\eta^3)^3\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int_0^1 \xi^2\,d\xi \cdot \int_0^1 (1-\eta)^3\,d\eta = \frac{1}{3}\left[-\frac{(1-\eta)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

Definition: Ist $F : \underline{\phi} : \overline{D} \to R^3$ ein Flächenstück und $\underline{v} : S \to R^3$ mit $F \subset S \subset R^3$ ein Vektorfeld. So nennt man $\int_F \underline{v}\,d\delta := \int_{\overline{D}} \underline{v}\big(\underline{\phi}(u,v)\big)\cdot\big(\underline{\phi}_u(u,v) \times \underline{\phi}_v(u,v)\big)\,d(u,v)$ das Oberflächenintegral des Vektorfeldes $\underline{v}$ über das Flächenstück F . Dies wird in Anlehnung an die physikalische Bedeutung bzw. Motivation auch als Fuss von $\underline{v}$ durch F bezeichnet.

Motivation: $\underline{v}$ Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung
$v \cdot \left(\underline{\phi}_u(u,v) \times \underline{\phi}_v(u,v)\right) d(u,v) = \det\left(v, \underline{\phi}_v, \underline{\phi}_u\right) d(u,v)$ ist das Volumen, welches pro Zeiteinheit durch $d\delta$ strömt.



Somit ist $\int_F \underline{v} d\underline{\delta}$ die Flüssigkeitsmenge, welche pro Zeiteinheit durch F zu der durch n ausgezeichneten Seite strömt.

Mit dem Normalenvektor

$$\underline{n} = \frac{\phi_u \times \phi_v}{|\phi_u \times \phi_v|}$$

und $d\delta = |\phi_u \times \phi_v| d(u,v)$ folgt $d\underline{\delta} = \overbrace{(\phi_u \times \phi_v)}^{keinBetrag \Rightarrow hatRichtung} \quad d(u,v) = \underline{n} d\delta$

Damit schreibt sich das Integral auch in der Form

$$\int_F \underline{v} d\underline{\delta} = \int_F \underline{v}(x) \underline{n} d\delta$$

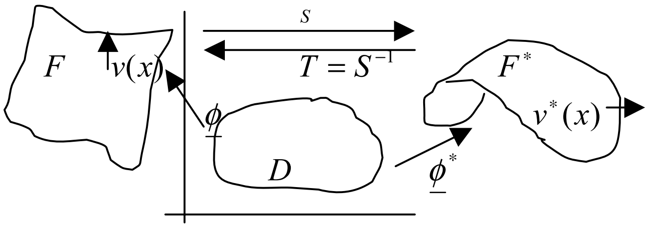
Wie oben erwähnt, gilt $v \cdot \left(\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v\right) = \det\left(v, \underline{\phi}_u, \underline{\phi}_v\right)$ und somit auch

$$\int_F \underline{v} d\underline{\delta} = \int_D \det\left(v\left(\underline{\phi}(u,v)\right), \underline{\phi}_u(u,v), \underline{\phi}_v(u,v)\right) d(u,v)$$

Ist F eine Fläche aus Flächenstücken $F_1, \ldots, F_n$ zusammengesetzt ist. So definiert man als Flächenintegral einer skalaren- als auch vektorwertigen Funktion über F durch die Summe

$$\int_F \ldots = \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} \ldots$$

Transformationsformel für Oberflächenintegrale eines Vektorfeldes



Wie verhalten sich Oberflächen-Integrale unter Abb. S?

Satz: Es sei $F : \underline{x} 0 \underline{\phi}(u) \ (u \in \overline{D})$ ein Flächenstück und $\underline{v} : F \to R^3$ ein Vektorfeld auf F.

Durch einen Diffeomorphismus $\underline{S} : F \to F^* \left(y = S(x)\right)$ mit $\det(\nabla S) \neq 0$ wird F in einem

Flächenstück $F^* : \underline{y} = \phi^*(u) := S(\phi(u)) \; \left(u \in \overline{D}\right)$ transformiert

$\underline{y}$ geht über in $\underline{v}^* : F^* \to R^3$ definiert durch

$$\underline{v}^*(\underline{y}) = \frac{\nabla S(x)}{\det(\nabla S(x))} v(x) \qquad \text{mit } S^{-1}(y)$$

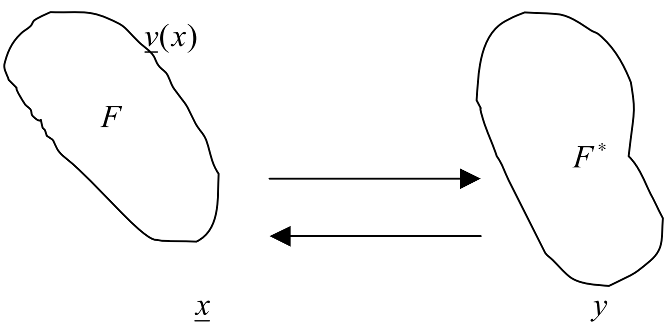
Mit der Umkehrabb. $\underline{T} = S^{-1} F^* \to F\left(\underline{x} = T(\underline{y})\right)$ kann man das $v^*(y)$ auch so schreibt

$$\underline{v}^* = (\det \nabla T)(\nabla T)^{-1} v \circ T$$

Damit gilt die Transformationsformel

$$\int_F v(x) d\underline{\delta} = \int_{F^*} v^*(y) d\underline{\delta}^* \quad \text{mit } d\underline{\delta}^* = \left(\phi_u{}^* \times \phi_v{}^*\right) d(u,v)$$

<u>Transformationsformel für Oberflächenintegrale von Vektorfeldern</u>



$$\int_F \underline{v}(x) d\underline{\delta} = \int_{F^*} v^*(y) \underline{\delta}^*$$

$$v^* = \det(JT) \cdot (JT)^{-1} v \circ T$$

<u>Bsp.:</u> Gesucht ist $\int_E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\underline{\delta}$, wobei E die Oberfläche gegeben durch $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$

Man sieht, daß E die Oberfläche eines Ellipsoids ist, welches sich durch die Abb. $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$ aus der Einheitskugel ergibt.

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, JT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \det(JT) = 2$$

$$v^*(y) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Parametrisierung durch Kugelkoordinaten

$$\varphi^*(\varphi,\delta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\delta \\ \sin\varphi\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} \quad \text{(andere Version als sonst)}$$

$$\varphi_\varphi{}^* = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\delta \\ \cos\varphi\cos\delta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi_\delta{}^* = \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\delta \\ -\sin\varphi\sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix}$$

$$\underline{\phi}_\varphi{}^* \times \underline{\phi}_\delta{}^* = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos^2\delta \\ \sin\varphi\cos^2\delta \\ \cos\sin\delta \end{pmatrix}$$

$$\iint_E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\underline{\delta} = 2\cdot \iint_K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\underline{\delta}^* = 2\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\delta \\ \sin\varphi\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos^2\delta \\ \sin\varphi\cos^2\delta \\ \cos\sin\delta \end{pmatrix} d\delta d\varphi =$$

$$= 2\iint \underbrace{\cos^2\varphi\cos^3\delta + \sin^2\varphi\cos^3}_{} + \sin^2\delta\cos\varphi d\delta d\varphi$$

$$\cos^2\delta + \sin^2\delta\cdot\cos\varphi = \cos$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi} \cos\delta d\delta$$

<u>Der Stockesche Integralsat</u>

Satz von Green: $\int_{\partial F} \underline{v}(x)d\underline{x} = \int_F rot\underline{v}(\underline{x})d\underline{\delta}$

Zirkulation: $v: M \to R^3$ sei ein stet. diffbares Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit in der offenen Menge $M \subseteq R^3$

In M betrachten wir eine geschlossene orientierte Jordankurve γ, die wir als stkweise glatt voraussetzen.

Das Kurvenintegral $\int_\gamma \underline{v}(\underline{x})d\underline{x}$ nennt man Zirkulation von $\underline{v}$ rings der Kurve γ.

Die wird durch approximierende Riemann-Summen $\sum \underline{v}(x_i)\nabla x_i$ motiviert.

Jeder Summand $\underline{v}(x_i)\cdot\nabla x_i$ ist eine Geschwindigkeitskomponente in Durchlaufrichtung der Kurve.

Die Summierung gibt ein Maß dafür an, wie stark die Kurve umströmt wird, d.h. wie stark die Flüssigkeit längs der Kurve „zirkuliert".

<u>Wirbelstärke:</u> In obiger Strömung mit Geschwindigkeitsfeld $v: M \to R^3$ betrachten wir ein stkw. glattes und einfach zusammenhängendes Flächenstück F und berechnen die Zirkulation entlang der Randkurve ∂F.

$$\int_{\partial F} \underline{v}(\underline{x})d\underline{x}$$

Die mittlere Wirbelstärke erhalten wir, wenn wir durch den Flächeninhalt $A(F)$ teilen.

$$\frac{1}{A(F)} \cdot \int_{\partial F} \underline{v}(\underline{x}) d\underline{x}$$

Um nun den Flächeninhalt in einem Punkt $\underline{x}_0 \in F$ zu erhalten, liegt es nahe, F und $\underline{x}_0$ zusammenzuziehen. Dabei nehmen wir F als eben an. (Flächennormale bleibt unverändert)

Definition: (Wirbelstärke) Es sei $\underline{v} : M \to R^3$ $\left(M \subseteq R^3 \mathit{offen}\right)$ stetig diffbar. und $\underline{x}_0$ ein Punkt aus M.

Der Grenzwert $w_n(x_0) = \lim\limits_{|F| \to 0} \frac{1}{A(F)} \int_{\partial F} \underline{v}(\underline{x}) d\underline{x}$ heißt Wirbelstärke von v in x_0.

$|F|$ symbolisiert den Durchmesser von F und $A(F)$ seien Flächeninhalt.

Existenz des Grenzwertes ergibt sich aus Greenschensatz. O.B.d.A. sei F parallel zur $x-y-$Ebene, parametrisiert durch x und y selbst, wobei die Randkurve ∂F das Flächenstück positiv umläuft. Mit

$$\partial F : \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}, a \le t \le b \text{ , } \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\int_{\partial F} \underline{v}(\underline{x}) d\underline{x} = \int_a^b \underline{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b v_1(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + v_2(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t) dt =$$

$$= \int_{\partial F} v_1 dx + v_2 dy = \iint_F \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) d(x,y) = A(F) \cdot \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \cdot (x^*)$$

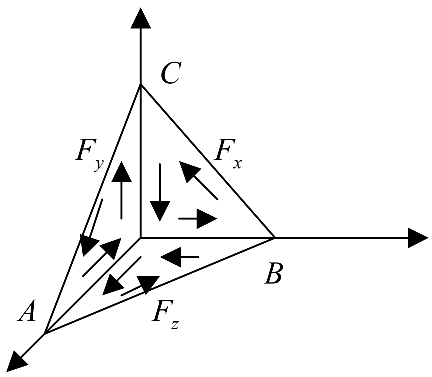
mit geeignetem $x^* \in F$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein solches $x^* \in F$.
Dividieren durch $A(F)$ und Kontraktion von F auf einen Punkt x_0 liefert die Wirbelstärke

$$w_n(x_0) = \left(v_{2,x} - v_{1,y}\right)(x_0) \text{ mit } n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Berechnung der Wirbelstärke:</u>

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall, daß das ebene Flächenstück schräg im Raum liegt.



F wird als kleines Dreieck $[A,B,C]$ gewählt, das mit dem Pkt. D ein Tetraeder mit den Seiten F, F_x, F_y, F_z bildet, wobei die Seiten F_x, F_y, F_Z rechtwinklig zur $x-$, $y-$ bzw. $z-$Achse liegt.

(Da die Existenz des Grenzwertes gesichert ist, ist die Form von F beliebig wählbar.)
Mit den skizzierten Umlaufungen der Flächenstücke des Tetraeders folgt für die entsprechenden Kurvenintegrale

$$\int_{\partial F} \underline{v} d\underline{x} = \int_{\partial Fx} \underline{v} d\underline{x} + \int_{\partial Fy} \underline{v} d\underline{x} + \int_{\partial Fz} \underline{v} d\underline{x}$$

da sich die Integralteile über die Kanten $[AD],[BD],[CD]$ wegheben. F_z liegt parallel zur $x-,y-$Ebene, also folgt aus obigen Untersuchungen

$$\int_{\partial Fz} \underline{v} d\underline{x} = A(F_z) \cdot r_3 \text{ mit } r_3 = (v_{2,x} - v_{1,y})$$

und analog

$$\int_{\partial Fy} \underline{v} d\underline{x} = A(F_y) \cdot r_2 \text{ mit } r_2 = (v_{1,z} - v_{3,x})$$

$$\int_{\partial Fx} \underline{v} d\underline{x} = A(F_x) \cdot r_1 \text{ mit } r_1 = (v_{3,z} - v_{2,x})$$

Addition liefert:

$$\frac{1}{A(F)} \int_{\partial F} \underline{v} d\underline{x} = \frac{A(Fx)}{A(F)} \cdot r_1 + \frac{A(Fy)}{A(F)} \cdot r_2 + \frac{A(Fz)}{A(F)} \cdot r_3$$

Es gilt aber $\begin{cases} A(Fx) == A(F)\cos\alpha \\ A(Fy) = A(F)\cos\beta \\ A(Fz) = A(F)\cos\gamma \end{cases} \qquad \underline{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$

wobei α, β, γ die Winkel zwischen den Flächennormalen $\underline{n}$ und den positiven Koordinatenachsen.
Zieht man F auf einen Pkt. x_0 zusammen, wobei $\underline{n}$ konstant bliebt, so erhält man

$$\lim_{\substack{|F|\to 0 \\ x_0 \leftarrow F}} \frac{1}{A(F)} \int_{\partial F} \underline{v} d\underline{x} = \underline{n} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Den Vektor (r_1, r_2, r_3) bezeichnet man als Rotation von $\underline{v}$, d.h.

$$rot\underline{v} = \begin{pmatrix} v_{3,y} - v_{2,z} \\ v_{1,z} - v_{3,x} \\ v_{2,x} - v_{1,y} \end{pmatrix}$$

Man beachte: $\qquad rot\underline{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

<u>Satz:</u> Für ein stetig diffb. Vektorfeld $\underline{v} : M \to R^3$ ist die Wirbelstärke in $\underline{x}_0 \in M$ gleich

$$w_n(x_0) = \lim_{\substack{|F|\to 0 \\ x_0 \in F}} \frac{1}{A(F)} \cdot \int_{\partial F} \underline{v} d\underline{x} = n \cdot rot\underline{v}(x)$$

Man bezeichnet $rot\underline{v}$ als Wirbelfeld zu $\underline{v}$.

<u>Bemerkung:</u> Obige Formel auf Strömungen eines Geschwindigkeitsfeldes $\underline{v}$ angewandt macht folgendes klar:
$rotv(x_o)$ gibt die Richtung der Rotationsachse für lokale Wirbel um x_0 an.

Für die Rotationsbildung $rot\underline{v}$ gelten die folgenden Rechenregeln, dabei seien $\underline{v}, \underline{w}$ stetig diffbar und $\lambda \in R$. (φ zweimal stetig diffbar)

$$rot(\underline{v}+\underline{w}) = rot\underline{v} + rot\underline{w}$$

$$rot(\lambda\underline{v}) = \lambda rot\underline{v}$$

$$rot(\underline{x}) = rot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$rot(grad\varphi) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{zy} - \varphi_{yz} \\ \varphi_{xz} - \varphi_{zx} \\ \varphi_{yz} - \varphi_{xy} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

<u>Idee des Stokesschen Integralsatz</u>

In einer Strömung mit Geschwindigkeitsfeld $v: M \to R^3$ $(M \subset R^3 offen)$ denken wir uns ein einfaches Flächenstück $F \subset M$. Es soll die Zirkulation um das Flächenstück aus den Wirbelstärken auf F berechnet werden. Dazu zerlegen wir F in endlich viele „Maschen" F_i

$$\int_{\partial F} \underline{v} d\underline{x} = \sum_i \int_{\partial F_i} \underline{v} d\underline{x}$$

Sind die "Maschen" klein genug, so ist nach obigen Betrachtung jeder Summand der rechten Seite ungefähr

$$\underline{n}_i \cdot rotv(x_i)\ A(F_i)$$

mit einem $x_i \in F_i$ und dem Normalenvektor $\underline{n}_i$ in $\underline{x}_i$. Somit folgt

$$\int_{\partial F} \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} \approx \sum_i \underline{n}_i rot\underline{v}(\underline{x}_i) \cdot A(F_i)$$

Grenzübergang $|F_i| \to 0$ motiviert schließlich den Stokesschen Integralsatz:

<u>Satz:</u> (Stokesscher Integralsatz)
Es sei $\underline{v}: M \to R^3$ $(M \subset R^3 offen)$ ein stetig diffbares Vektorfeld und F ein stückweise glatt berandetes Flächenstück in M. Dann gilt

$$\int_{\partial F} \underline{v}(\underline{x}) d\underline{x} = \int_F rot\underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{\delta}$$

<u>In Worten</u> Die Zirkulation entlang einer Kurve die ein Flächenstück umschließt ist gleich dem Integral über alle Wirbelstärken auf dem Flächenstück.

<u>Folgerung</u> Es sei $v: M \to R^3$ stetig diffbar. $\left(M \subset R^3 offen\right)$ und B sei ein glatt berandeter Bereich in M. Dann gilt:

$$\int_{\partial B} rot\underline{v}(x) \cdot d\underline{\delta} = 0$$

<u>Bew.:</u> Aus ∂B schneide man ein kleines Flächenstück F heraus. Nach „Stocks" gilt

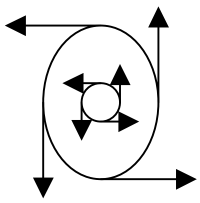
$$\int_{\partial B / F} rotv(x) \cdot d\underline{\delta} = \int_{\partial F} \underline{v}(x) \cdot d\chi$$

Zieht man nun F auf einen Punkt $x_0 \in B$ zusammen, so folgt die Behauptung.

<u>Bem.:</u> Der Wirbelfluss durch eine geeschlossene Fläche ist Null.

<u>Bsp.:</u> Konstantes Wirbelfeld

Das Vektorfeld $v(x) = \frac{1}{2}\underline{w} \times \underline{x} \quad \left(\underline{w}, \underline{x} \in R^3, \underline{w} \neq 0\right)$



Kann in der Ebene E senkrecht zu $\underline{w}$
Wie nebenstehend skizziert werde.

Es folgt

$$rotv = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\underline{w} \times \underline{x}\right) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_2 - w_3 y \\ w_3 x - w_1 z \\ w_1 y - w_2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \underline{w}$$

Für jedes einfache Flächenstück F in der Ebene E gilt nach dem Stokesschen Integralsatz

$$\int_{\partial F} \underline{v} \cdot d\underline{x} = \int_F \underset{\substack{\uparrow \\ rot\underline{v}}}{\underline{w}} \cdot d\underline{\delta} = \underline{w} \cdot \int_F d\underline{\delta} = |w| \cdot A(F)$$

<u>Stokescher Satz in der Ebene</u>

Man definiert die Zirkulation in $2D$ (analog zu $3D$). γ sei eine geschlossene Jordankurve mit $\underline{x} = \underline{\gamma}(t) \quad (a \le t \le b)$

$$Z = \int_\gamma \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_\gamma v_1 dx + v_2 dy := \int_a^b v(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

Um läuft γ dabei ein einfachzusammenhängendes Gebiet $D \subset R^2$ im positiven Sinne, so folgt aus dem Stokesschen Integralsatz im R^3 (durch Nullsetzen der dritten Koordinaten) der Stokessche Satz in der Ebene

$$\int_\gamma v_1 dx + v_2 dy := \int_D \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} d(x,y)$$

Bem.: In der Ebene fallen die Sätze von Stokes, Gauß und Green susammen, d.h. sie sind identisch.

Integral-und Differentialformel in R^n $\left(bzw. R^3\right)$

Nabla-Operator

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Schon kennengelernt hatten wir(φ Skalarfeld, $\underline{v}$ Vektorfeld)

$grad\varphi = \nabla\varphi$ (in R^n)
$div\underline{v} = \nabla\underline{v}$ (in R^n)
$rot\underline{v} = \nabla \times \underline{v}$ (in R^n)

Ist φ zweimal stetig diffbar, so erhält man

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi = div(grad\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n{}^2}\right)\varphi =: \nabla\varphi \quad \text{(kurz } \nabla^2 = \Delta\text{)}$$

Der Laplace-Opertor Δ kann auch auf Vektorfelder $\underline{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)^T$ angewandt werden

$$\Delta v = (\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n)^T$$

Doppelte Anwendungen von $grad, rot, div$: Dabei seien $\underline{u}, \underline{v} : M \to R^3$ Vektorfelder und φ, ψ Skalarfelder der offenen Menge $M \subset R^3$.

i) $div(rot\underline{u}) = 0$ (Wirbelfeld ist quellenfrei)
ii) $rot(grad\varphi) = 0$ (Gradientenfeld ist wirbelfrei)
iii) $div(grad\delta) = \Delta\varphi$
iv) $rotrot\underline{v} = graddiv\underline{v} - \underbrace{divgrad\underline{v}}_{\Delta v}$

Für Produkte gilt:

i) $grad(\varphi, \psi) = \varphi grad\psi + \psi grad\varphi$
ii) $div(\varphi, \underline{v}) = \varphi div\underline{v} + \underline{v} grad\varphi$
iii) $rot(\varphi\underline{v}) = \varphi rot\underline{v} + grad\varphi \times \underline{v}$
iv) $grad(\underline{u} \cdot \underline{v}) = \underline{u} \times rot\underline{v} + \underline{v} \times rot\underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{u}$
v) $div(\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{v} rot\underline{u} - \underline{u} rot\underline{v}$
vi) $rot(\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{u} div\underline{v} - \underline{v} div\underline{u} - (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{u} - (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{v}$

Beweis von iv)

$$\left(grad(u,v)\right)_1 = \left(grad(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)\right)_1 = u_{1,x}v_1 + u_1v_{1,x} + u_{2,x}v_2 + u_2v_{2,x} + u_{3,x}v_3 + u_3v_{3,x}$$

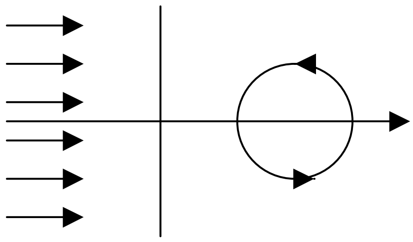
$$rot\underline{u} = \begin{pmatrix} u_{3,y} - u_{2,z} \\ u_{1,z} - u_{3,x} \\ u_{2,z} - u_{1,y} \end{pmatrix}, \quad \underline{v} \times rot\underline{u} = \begin{pmatrix} v_2(u_{2,x} - u_{1,y}) - v_3(u_{1,z} - u_{3,x}) \\ v_3(u_{3,y} - u_{2,z}) - v_1(u_{2,x} - u_{1,y}) \\ v_1(u_{1,z} - u_{3,x}) - v_2(u_{3,y} - u_{2,z}) \end{pmatrix}$$

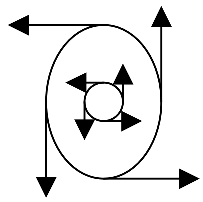
$$\left(\underline{u} \times rot\underline{v} + \underline{v} \times rot\underline{u}\right)_1 = v_2u_{2,x} - v_2u_{1,y} - v_3u_{1,z} + v_3u_{3,x} + u_2v_{2,x} - u_2v_{1,y} - u_3v_{1,z} + u_3v_{3,x}$$

$$(\underline{u} \cdot \nabla) = u_1\frac{\partial}{\partial x} + u_2\frac{\partial}{\partial y} + u_3\frac{\partial}{\partial z} \qquad \left((\underline{u}\cdot\nabla)\underline{v}\right)_1 = u_1v_{1,x} + u_2v_{1,y} + u_2v_{1,z}$$

<u>Zirkulation</u>

$$\int_\gamma \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$$





<u>Gaußscher und Stokesscher Integralsatz in div, grad, rot-Form</u>

Wie bisher bezeichne: $\underline{v}: M \to R^3$ ein Vektorfeld und
$\varphi: M \to R$ ein Skalarfeld auf einer offenen Menge $M \subset R^3$
Der Bereich $B \subset M$ wie die Fläche $F \subset M$ seien stkw. glatt berandet.

<u>Satz:</u> Gaußscher Integralsatz in $div-, grad-$ und $rot-$ Form

i) $$\int_{\partial B} \underline{v}(\underline{x})d\underline{\delta} = \int_B div\left(\underline{v}(\underline{x})\right)dF \left(= \int_{\partial B} \underline{v}(\underline{x})\underline{n}(\underline{x})d\delta \right)$$

ii) $$\int_{\partial B} \varphi(\underline{x})d\underline{\delta} = \int_B grad\varphi(\underline{x})dF \left(= \int_{\partial B} \varphi(\underline{x})\underline{n}(\underline{x})d\delta \right)$$

iii) $$\int_{\partial B} d\underline{\delta \times \underline{v}(\underline{x})} = \int_B rot\underline{v}(\underline{x})dF \left(= \int_{\partial B} \underline{n}(\underline{x}) \times \underline{v}(\underline{x})d\delta \right)$$

<u>Bew.:</u> von $ii)$ Setze $\underline{v}(\underline{x}) = \varphi(x) \cdot \underline{a} \quad (\underline{a} \in R^3$ beliebig)
Einsetzen in $i)$ liefert

$$\int_{\partial B} \varphi(x)\underline{a}d\underline{\delta} = \int_{\partial B} \varphi(x)\underline{a}\underline{n}(\underline{x})d\delta = \underline{a}\int_{\partial B} \varphi(\underline{x})\underline{n}(\underline{x})d\delta = \underline{a}\int \varphi(\underline{x})d\underline{\delta}$$

$$\overset{i)}{=} \int_{\partial B} \underbrace{div(\varphi(\underline{x})\underline{a})}dF = \underline{a} \cdot \int_B \nabla\varphi(\underline{x})dF$$

$$= \varphi(\underline{x}) \cdot \underbrace{div(\underline{a})}_{=0} + \nabla\varphi(\underline{x}) \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot \nabla\varphi(\underline{x})$$

Bew.: von iii) Setze $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{a} \times \underline{w(\underline{x})}$ mit ($a \in R^3$ beliebig)

Aus i) folgt

$$div(\underline{a} \times \underline{w}) = -\underline{a} \cdot rot\underline{w} \Rightarrow \int_{\partial B} (\underline{a} \times \underline{w}(\underline{x})) \cdot d\delta = -\int_B \underline{a} \cdot rot\underline{w}dF$$

Es gibt $(u \times v) \cdot w = u(v \times w)$

Also folgt

$$\int_{\partial B} (\underline{a} \times \underline{w}(\underline{x}))d\underline{\delta} = \cdot \int_{\partial B} \underline{w}(\underline{x}) \times \underline{n}(\underline{x})d\underline{\delta} = -a \cdot \int_B rot\underline{w}dF$$

Merke: Volumenintegrale über $div-, grad..., rot...$ lassen sich in Oberflächenintegrale umwandeln.

Satz: Stokesscher Integralsatz in $div, \nabla -$ und $rot -$ Form

i) $$\int_{\partial F} \underline{v}(\underline{x})d\underline{x} = \int_F rot\underline{v}(\underline{x})d\underline{\delta}$$

ii) $$\int_{\partial F} \varphi(\underline{x})d\underline{x} = \int_F d\underline{\delta} \times grad\varphi(\underline{x})$$

iii) $$\int_{\partial F} d\underline{x} \times \underline{v}(\underline{x}) = \int_F (d\underline{\delta} \times \nabla) \times \underline{v}(\underline{x})$$

Man beachte $d\underline{\delta} = \underline{n}(x)d\delta$ und $d\underline{x} = \underline{T}(\underline{x})ds$, dabei sei $\underline{n}$ Flächennormale und $\underline{T}$ Tangenteneinheitsvektor an ∂F

Bew.: von ii) Setze $\underline{v}(\underline{x}) = \varphi(x)\underline{a}$ ($\underline{a} \in R^3$ beliebig)

$$\underline{a} \cdot \int_{\partial F} \varphi(\underline{x})d\underline{x} = \int_{\partial F} \varphi(\underline{x}) \cdot \underline{a} \cdot d\underline{x} = \int_F \underbrace{rot(\varphi(\underline{x})\underline{a})}_{\underbrace{\varphi rot\underline{a}}_{0} + \nabla\varphi \times \underline{a}} d\underline{\delta} = \int_F (\nabla\varphi \times \underline{a})d\underline{\delta} =$$

$$\Rightarrow \int_{\partial F} \varphi(\underline{x})d\underline{x} = \int_F d\underline{\delta} \times (\nabla\varphi(\underline{x}))$$

Partielle Integration

Aus der eindimensionalen Analysis ist die Formel

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

der partellen Integration bekannt. In 3D gibt es mehrere Gegenstücke dazu. Sie ergeben sich aus dem Gaußschen-Integralsatz, in dem man die Diff-Operatoren $div, grad, rot$ auf Produkte von Feldern anwendet.

i) Aus $grad(\varphi(x) \cdot \psi(x)) = \varphi(x)grad\psi(x) + \psi(x)grad\varphi(x)$ folgt

$$\int_{\partial B} \varphi(x)\psi(x)\,d\underline{\delta} = \int_B \varphi(x)\,grad\,\psi(x) + \psi(x)\,grad\,\varphi(x)\,dF$$

z.B. $\varphi(x) = 1 \Rightarrow \int_{\partial B} \psi(x) n(x)\,d\delta = \int_B grad\,\psi(x)\,dF$

ii) Aus $div\big(\varphi(x)\cdot v(x)\big) = \varphi(x)\,div\,v(x) + grad\,\varphi(x)\cdot v(x)$ folgt

$$\int_{\partial B} \varphi(x)\cdot v(x)\,d\underline{\delta} = \int_B \varphi(x)\,div\,v(x) + grad\,\varphi(x)\cdot v(x)\,dF$$

iii) Aus $div(\underline{v}\times\underline{w}) = \underline{w}\cdot rot\,\underline{v} - \underline{v}\cdot rot\,\underline{w}$ folgt

$$\int_{\partial B} (\underline{v}\times\underline{w})\,d\underline{\delta} = \int_B \underline{w}\cdot rot\,\underline{v} - \underline{v}\cdot rot\,\underline{w}\,dF$$

iv) Aus $rot\big(\varphi(\underline{x})\underline{v}(\underline{x})\big) = \varphi(\underline{x})\cdot rot\,\underline{v}(x) + grad\,\varphi(\underline{x})\times\underline{v}(\underline{x})$ folgt

$$\int_{\partial B} d\underline{\delta}\times\big(\varphi(\underline{x})\underline{v}(\underline{x})\big) = \int_B \varphi(\underline{x})\cdot rot\,\underline{v}(\underline{x}) + \big(grad\,\varphi(\underline{x})\big)\times\big(\underline{v}(\underline{x})\big)\,dF$$