

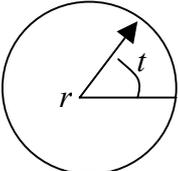
III Theorie ebener Kurven

Kurven \equiv krumme oder gerade Linien z.B. Bahn bewegter Körper, Konturen ebener Körper, Kanten räumlicher Gebilde oder Idealisierung für die dünnen Stangen, Seile.

Wege, Kurven, Bogenlänge

Betrachten wir zuerst Kurven in der Ebene.

Beispiel III.1: Ein Kreis von Radius $r > 0$ um den Ursprung O kann durch

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad \otimes$$


The diagram shows a circle centered at the origin O. A radius vector of length r is drawn from the origin to the circle, making an angle t with the positive x-axis. The angle t is indicated by an arc between the x-axis and the radius vector.

beschrieben werden. Man bezeichnet \otimes als Parameterdarstellung des Urkreises und t als zugehörigen Parameter.

Die Gleichungen \otimes werden zuerst in einer Vektorgleichung

$$\underline{x} = \gamma(t) \text{ mit } \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \quad (a \leq t \leq b)$$

geschrieben. Die durch bestimmte Mengen von Punkten \underline{x} heißt ebene Kurve $\gamma[a, b] \rightarrow R^2$ nennt man einen Weg.

Bemerkung III.2: Sein $\gamma(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $\gamma^*(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix}$. Dann bezeichnen die

Parametrisierungen

$x = y(t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $x = y(t)$ ($0 \leq t \leq 4\pi$), $x = y^*(t)$ ($0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$) die gleiche Kurve aber parametrisieren verschiedene Wege.

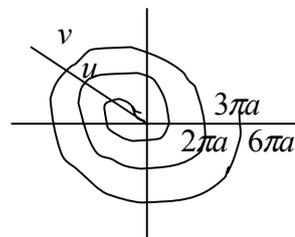
Beispiel III.3: Archimedische Spirale

$$\gamma(t) = at \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 3 \cdot 2\pi \quad (a > 0) \quad (t \text{ willkürlich beschränkt})$$

$$|u - v| =$$

$$= at \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - a(t + 2\pi) \begin{pmatrix} \cos(t + 2\pi) \\ \sin(t + 2\pi) \end{pmatrix}$$

$$= a2\pi$$



Bemerkung:

Man erkennt, daß es unmöglich ist die Spirale durch einen Funktionengraph zu beschreiben. Es gibt also Kurven, die nicht als Funktionengraph aufgefaßt werden können. Umgekehrt kann ein Funktionengraph recht leicht parametrisiert werden,

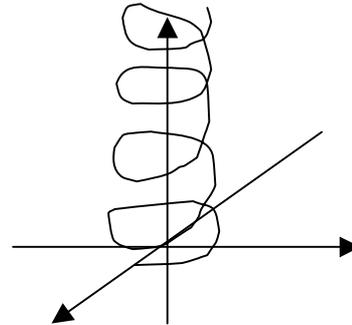
$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= f(t) \end{aligned} \quad t \in [a, b]$$

- Definition III.4:**
- i) Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Weg im \mathbb{R}^n .
 - ii) Der Wertebereich $\gamma([a, b])$ des Weges γ wird eine Kurve genannt. Die Kurve ist also der Menge der Punkte $x = \gamma(t), t \in [a, b]$. Diese Gleichung ist eine Parameterdarstellung mit den zugehörigen Parameter t .
 - iii) Eine Kurve wird häufig als Bogen bezeichnet.

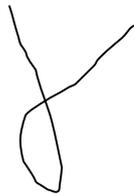
Beispiel: Schraubenlinie im \mathbb{R}^3

$$y(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ rtc \end{pmatrix} \quad t \in [a, b] \quad c > 0$$

r Radius
 $h = 2\pi c$ (Ganghöhe der Schraubenlinie)



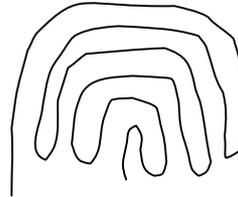
$y(a)$ $y(b)$



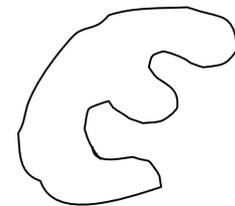
Doppelpunkt
eines Weges



$y(a) = y(b)$
geschlossener Weg



$y(a)$ $y(b)$
Jordankurve



$y(a) = y(b)$
geschlossene
Jordankurve

Zusammengesetzte Wege und Kurven

Es sei $[a, b]$ in m Teilintervalle $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ ($t_1 = a, t_n = b$) zerlegt. Darauf seien im Wege $\gamma_i [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, m$) erklärt welche die Stetigkeitsbedingung

$$\gamma_i(t_i) = \gamma_{i+1}(t_i) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m-1$$

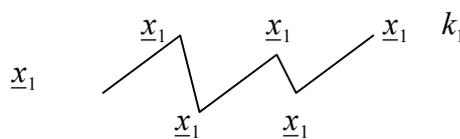
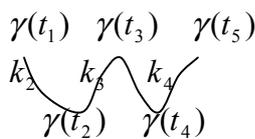
erfüllt. Durch

$$\gamma_i(t_i) := \gamma_i(t) \quad \text{für } t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (i = 1, \dots, m)$$

ist damit der Weg auf ganz $[a, b]$ definiert, den man die Summe der Teilfolgen nennt und durch

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_m$$

symbolisiert.



Bemerkung III.8: Oft treten zusammenhängende Kurven in der Form von Streckenzügen auf, welche in der Ebene als Polynomzüge bezeichnet.

Glatte und stückweise glatte Kurven

- Definition III.9:**
- i) Ein Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow R^n$ heißt stetig diffbar, wenn die Ableitungsfunktion $\dot{\gamma}$ auf $[a, b]$ existiert und da stetig ist. $\gamma(a) = \gamma(b)$ so wird zusätzlich $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$ verlangt.
 - ii) Ein Weg heißt glatt wenn er stetig diffbar. ist und seine Ableitung $\dot{\gamma}(t)$ in keinem Punkt $f \in [a, b]$ verschwindet. Die von γ erzeugte Kurve wird ebenfalls als glatt bezeichnet.

Bogenlänge

Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow R^n$ ein bel. Weg und $Z = \{t_0, \dots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Durch die Bildpunkte $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_m)$ denken wir und einen Streckenzug.

Die Summe

$$L_\gamma(Z) = \sum_{i=0}^m |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$



nennen wir die Länge des Streckenzuges

- Definition III.12:**
- i) Die Bogenlänge eines Weges $\gamma: [a, b] \rightarrow R^n$ ist def. Durch

$$L_\gamma = \sup_Z L_Z(\gamma)$$
 - ii) Ein Weg heißt rektifizierbar oder auch streckbar, wenn $L(\gamma) < \infty$ gilt.
 - iii) Man bezeichnet $L(\gamma)$ auch die Bogenlänge der Kurve.

Bsp.: a) Adventsstern



Aus jeder Strecke S_i wird in S_{i+1} die folgende Strecke

$$t^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3^2$$

$$t = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$V(s_0) = \frac{9}{4}\sqrt{3}, V(s_1) = V(s_0) + 3 \frac{V(s_0)}{9} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)V(s_0)$$

$$V(s_2) = V(s_1) + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2} V(s_0) = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3}\right)V(s_0)$$

$$V(S_3) = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5}\right) V(S_0) = \frac{1}{3} \left(3 + 1 + \frac{4}{3^2} + \left(\frac{4}{3^2}\right)^2\right) V(S_0)$$

$$V(S_{n+1}) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) V(S_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{9}{5} = \frac{14}{5} \leq 3$$

$$U(S_0) = 3 \cdot 3 = 9, U(S_1) = \frac{4}{3} U(S_0) = 12, U(S_2) = \frac{4}{3} U(S_1) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 U(S_0)$$

$$\frac{4}{3} U(S_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n U(S_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

b) Weg: $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ mit $x = \gamma_1(t) = t$

$$\gamma = \gamma_2(t) := \begin{cases} t \cos \frac{\pi}{2} & , t \in [0,1] \\ 0 & , t = 0 \end{cases}$$

Der Weg ist nicht rektifizierbar

Für die Zerlegung mit den Punkten

$$t_k = \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad t_m = 0$$

gilt

$$\gamma_2(t_k) = \frac{1}{k} \cos k\pi = \frac{(-1)^k}{k} \quad (k = 1, \dots, m-1)$$

Da $\gamma_2(t_1), \gamma_2(t_2), \dots$ abwechselnde Vorzeichen haben, ist die Bogenlänge zu den

Teilstücken $\gamma(t)$ mit $t \in [t_{k+1}, t_k]$ sicherlich größer als $|\gamma_2(t_k)| = \frac{1}{k}$. Also folgt

$$L_Z(\gamma) \geq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \rightarrow \infty, \text{ d.h. } \gamma \text{ ist nicht rektifizierbar.}$$

Definition III.10: $\dot{\gamma}(t)$ heißt der Tangenten (bzgl. γ) in t . Aus ihm wird der Tangenteneinheitsvektor gebildet

$$T_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\left| \dot{\gamma}(t) \right|}$$

Bem.: Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, schreibt man auch $T(t)$.

Satz: (Additivität der Bogenlänge)

Es sei

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_m$$

γ ist genau dann rektifizierbar, wenn alle Teillängen $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ rektifizierbar sind.

Für die Bogenlänge gilt dann

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) + \dots + L(\gamma_m)$$

Bew.: Es genügt den Fall $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ zu beweisen. Der Rest folgt durch vollständige

Induktion. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zerlegt in γ_1, γ_2 mit $\gamma_1: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und

$\gamma_2: [c, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine Zerlegung Z von $[a, b]$ erzeugt durch Hinzunahme eines Punktes c Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, c]$ und $[c, b]$.

Damit folgt

$$L_Z(\gamma) \leq L_{Z_1}(\gamma_1) + L_{Z_2}(\gamma_2) \leq L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$$

$$\Rightarrow L(\gamma) \leq L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \quad \otimes$$

Umgekehrt liefern Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, c]$ und $[c, b]$ auch eine Zerlegung Z von $[a, b]$. Daraus folgt:

$$L_{Z_1}(\gamma_1) + L_{Z_2}(\gamma_2) \leq L_Z(\gamma) \Rightarrow L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \leq L(\gamma)$$

$$\Rightarrow L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \leq L(\gamma) \quad (\otimes \otimes)$$

Aus \otimes und $(\otimes \otimes)$ folgt die Behauptung.

Satz: Jede stückweise stetig diffb. Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar und es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \left| \dot{\gamma}(t) \right| dt$$

Bsp.: Ist durch $y = f(x)$ eine stetig diffb. reelle Funktion auf $[a, b]$, so erhält man über die Parameterdarstellung $x = t, y = f(t)$ die Länge des Graphen mittels

$$L = \int_a^b \sqrt{1^2 + (f'(t))^2} dt$$

Bew.: (Beweis der Rektifizierung siehe Literatur)

Es sei $Z = \{x_0, \dots, x_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $x_0 = a, x_m = b$. Ferner

sei $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$. Mit $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\begin{aligned} L_Z(\gamma) &= \sum_{i=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n (\gamma_k(x_i) - \gamma_k(x_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\dot{\gamma}_k(\xi_i^{(k)}) \right)^2} \cdot |I_k| \end{aligned}$$

$$\text{mit } \xi_i = \left(\xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(n)} \right) \in I_i$$

$L_Z(\gamma)$ läßt sich als Riemann-Summe auffassen. Für jede Folge (Z_i) mit $|Z_i| \rightarrow 0$, wobei $|Z_i|$ die Feinheit der Zerlegung Z_i ist, liefert dies

$$\lim_{|Z_i| \rightarrow 0} L_Z(\gamma) = \int_a^b \left| \dot{\gamma}(t) \right| dt$$

Nun gilt

$$L(\gamma) = \sup_Z L_Z(\gamma)$$

Es sei nun Z_0 eine Zerlegung mit $|L(\gamma) - L_{Z_0}(\gamma)| \leq \varepsilon$, dann wählen wir eine Verfeinerung Z_1 von Z_0 mit $|Z_n| \leq \delta$.

Man beachte

$$|L - L(\gamma)| \leq \underbrace{|L - L_{Z_0}(\gamma)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|L_{Z_0}(\gamma) - L_{Z_1}(\gamma)|}_{\varepsilon} + \underbrace{|L_{Z_1}(\gamma) - L(\gamma)|}_{\leq \varepsilon} \leq 3\varepsilon$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt die Konvergenz und somit die Behauptung.

Für eine ebene stückweise diffb. Kurve mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} t \in [a, b]$ und $\dot{x} := \dot{\gamma}_1(t)$ und

$\dot{y} := \dot{\gamma}_2(t)$ schreibt man das Bogenlängenintegral auch

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (\text{in 3D } L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt)$$

Bsp.: Die Schraubenlinie dargestellt

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t \quad \text{hat für die } t \in [0, S] \text{ Länge}$$

$$z = ct$$

$$L(\gamma) = \int_0^S (r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + c^2)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^S (r^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} dt = S \sqrt{r^2 + c^2}$$

Bogenlänge eines Funktionengraphen

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, f sei stetig diffb.

Parameterdarstellung

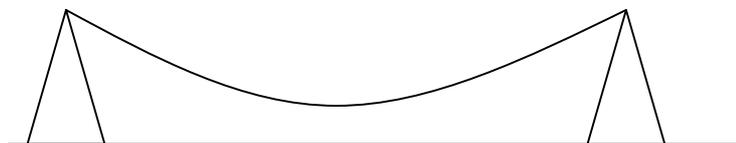
$$x = t$$

$$y = f(t) \quad t \in [a, b]$$

Die Länge des Graphens ergibt sich mittels

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \quad \otimes$$

Bsp.: (Kettenlinie)



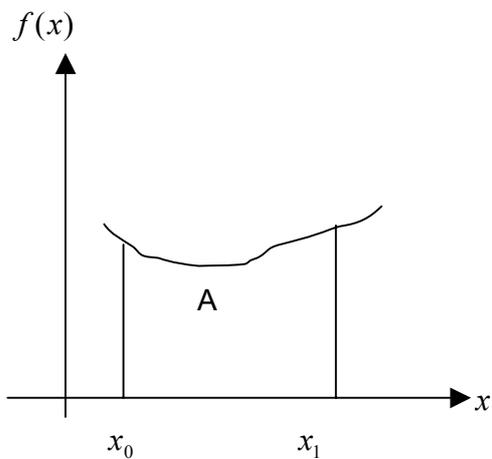
Durchhängende Seile werden durch eine cosh-Funktion dargestellt und zwar

$$f(x) = h_0 + c \left(\cosh \frac{x-x_0}{c} - 1 \right) \quad c > 0$$

Ihre Länge des Graphen zwischen $x = a$ und $x = b$ ist nach \otimes

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\sinh \frac{x-x_0}{c} \right)^2} dx \\ &= \int_a^b \cosh \frac{x-x_0}{c} dx = c \left(\sinh \frac{b-x_0}{c} - \sinh \frac{a-x_0}{c} \right) \end{aligned}$$

Flächeninhalte von Flächen mit gegebenen Randkurven

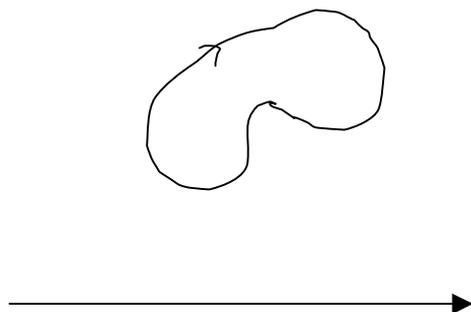
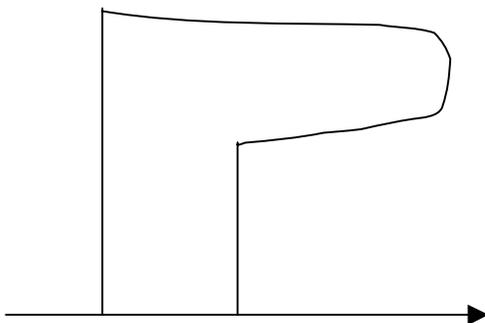


Bekanntlich gilt

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$$

Stellen wir uns vor, daß der Funktionsgraph von f durch eine stückweise glatte Parametrisierung $y = \gamma_1(t)$ $x = \gamma_2(t)$ gegeben ist. Dann gilt nach Substitution

$$A = \int_{\gamma_1(x_0)}^{\gamma_1(x_1)} f(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \dot{x}(t) dt \quad \text{mit } \gamma_2(t_0) = x_0; \gamma_2(t_1) = x_1$$



Daraus wird klar: Ist die Kurve eine geschlossene Jordankurve, die ihr Inneres im Uhrzeigersinn durchläuft so ergibt das Integral

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \dot{x}(t) dt$$

des Flächeninhaltes des eingeschlossenen Gebiets.

Man sieht sofort, daß

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \dot{x}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t) \dot{y}(t) dt$$

gilt.

Bsp.: (Kreisfläche) Parametrisierung $x = r \cdot \cos t$, $y = r \cdot \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$
Somit ergibt sich

$$A = - \int_0^{2\pi} r \sin^2 t dt = r^2 \cos t \sin t = r^2 \cos t \sin t \Big|_0^{2\pi} - r^2 \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos t}_{1-\sin t} dt$$

$$\Rightarrow - \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 t dt = \frac{1}{2} (r^2(0) - r^2 2\pi) = -r^2 \pi$$

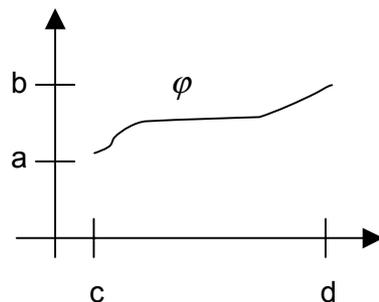
Bsp.: (Ellipse) $x = a \cos t$, $y = -b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

$$A = \int_0^{2\pi} ab \sin t dt = ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = ab \pi$$

Definition III.11: Es sei γ ein stückweise glatter Weg mit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stkw. glatte Parametrisierungsformat. Damit ist auch

$$\delta = \gamma \circ \varphi, \text{ also } \delta(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$$

ein stkw. glatter Weg. Wir nennen in diesem Fall γ und φ äquivalent.



$$\gamma(b) = \delta(c)$$

$$\gamma(a) = \delta(c)$$

Satz III.12: Zwei äquivalente Wege γ und φ erzeugen die gleiche Kurve, haben die selben Anfangs- und Endpunkte und haben die selbe Bogenlänge. Ist γ geschlossen oder doppelpunktfrei so gilt das auch jeweils für φ . Des Weiteren stimmen auch die Tangenteneinheitsvektoren in den entsprechenden Punkten überein, d.h. es gilt mit $\delta = \gamma \circ \varphi$

$$T_\delta(\tau) = T_\gamma(t), \text{ wobei } t = \varphi(\tau) \text{ ist.}$$

Nochmals Flächeninhalte zu vorgegebenen Randkurven

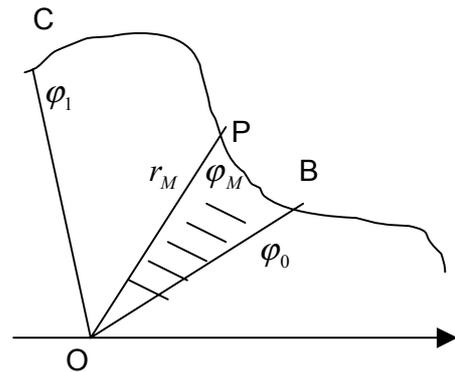
Es sei $r = f(\varphi)$ gegeben, wobei f stetig auf $[\varphi_0, \varphi_1]$ ist. Dann ist der Flächeninhalt eines Winkelsektors OBC (wie skizziert) gleich

$$\otimes A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r(\varphi)^2 d\varphi$$

für den schraffierten Flächeninhalt ΔA gilt

$$\frac{1}{2} r_m^2 \Delta\varphi \leq \Delta A \leq \frac{r_M^2}{2} \Delta\varphi$$

und somit gilt $\frac{r_m^2}{2} \leq \frac{\Delta A}{\Delta\varphi} \leq \frac{r_M^2}{2}$



Mit der Flächeninhaltsfunktion $A_n = F(\varphi)$, die den Inhalt des Sektors OBP beschreibt folgt aus den Ungleichungen $\Delta\varphi \rightarrow 0$

$$\frac{dA}{d\varphi} = F'(\varphi) = \frac{1}{2} r^2$$

Der Hauptsatz der Diff.-und Integralrechnung liefert gerade die Behauptung \otimes .

Achtung bei der Ellipse!

Bei der Darstellung \otimes sind wir ausgegangen von einer Parametrisierung

$$\begin{aligned} x &= r(\varphi) \cos \varphi \\ y &= r(\varphi) \sin \varphi \end{aligned} \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$$

Diese Darstellung ist jedoch nicht äquivalent zu

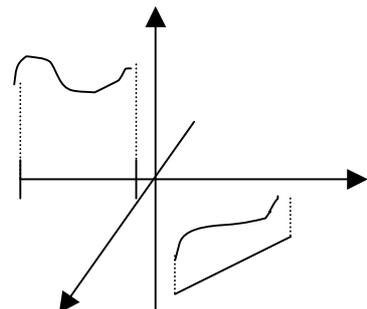
$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= b \sin \varphi \end{aligned}$$

bei der Ellipse.

Kurvenintegrale

Betrachten wir den anschaulichen Fall $n = 3$. Die Kurve besitzt in $\gamma(t)$ den skalaren Funktionswert $f(\gamma(t))$. Zur Berechnung des Integrals $\int_\gamma f dt$ wird die Kurve durch die Zer-

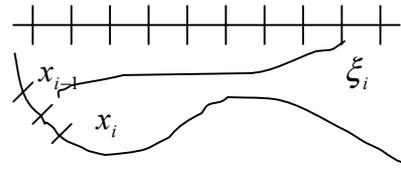
legung des Parameterintervalls $z = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = b\}$ in Bögen über $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i < m$)



der Länge $\Delta S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\dot{\gamma}(t)| dt = |\dot{\gamma}(\xi_i)| |I_i|$ ($\xi_i \in I_i$) zerlegt.

Mit

$$f(\gamma(\xi_1)) \Delta S_i = f(\gamma(\xi_i)) |\dot{\gamma}(\xi_i)| |I_i|$$



wird das Integral über dem i -ten Teilintervall approximiert, d.h. das Intervall durch

$$S(Z, f) = \sum_{i=1}^m f(\gamma(\xi_i)) |\dot{\gamma}(\xi_i)| |I_i|.$$

Diese Riemann-Summe konvergiert mit $m \rightarrow \infty$ und

$$|I_i| \rightarrow 0 \text{ gegen } \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt$$

Damit haben wir folgende Definition motiviert.

Definition III.13: $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Dann heißt $\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt$ das Kurvenintegral von f längs γ .

Kochrezept

Zur Berechnung von $I = \int_{\gamma} f ds$ in \mathbb{R}^n

1) Parametrisiere die Kurve mit

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)), \quad a \leq t \leq b$$

2) Bogenelement bestimmen mittels Differentiation

$$ds = |\dot{\gamma}(t)| dt = \sqrt{\left(\dot{\gamma}_1(t)\right)^2 + \left(\dot{\gamma}_2(t)\right)^2 + \dots + \left(\dot{\gamma}_n(t)\right)^2} dt$$

3) Einsetzen: $\gamma(t)$ in den Integranden $f(\gamma(t))$

$$ds = |\dot{\gamma}(t)| dt, \text{ Integrationsgrenzen.}$$

4) Ausrechnen des bestimmten Integrals

$$I = \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt$$

Bsp.: Es ist die Masse $M = \int \rho ds$ einer Feder mit Massendichte $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ zu berechnen.

Dabei ist die Kurve gegeben durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \\ 3t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 6\pi$

1) dito

$$2) \quad ds = (4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 9)^{\frac{1}{2}} dt = (4 + 9)^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{13} dt$$

$$3) \quad I = \int_0^{6\pi} (4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t) \cdot \sqrt{13} dt = 4\sqrt{13} \int_0^{6\pi} dt = 24\sqrt{13}\pi$$

Satz: Es sei γ ein zusammengesetzter Weg, d.h.

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_m$$

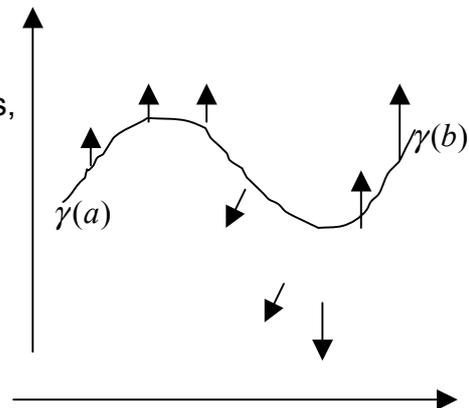
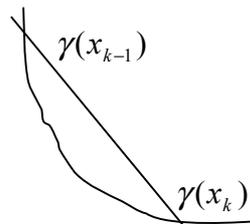
Ferner gelten die Voraussetzungen des letzten Satzes.

$$\text{Dann gilt:} \quad \int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds + \dots + \int_{\gamma_m} f ds$$

Integration eines Vektorfeldes entlang einer Kurve

Ist $Z = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_m = b\}$ des Parameterintervalls, so gibt es auf Verbindungsstrecke $\gamma(x_{k-1})$ und $\gamma(x_k)$ einen Punkt η_k mit

$$\varphi(\gamma(x_k)) - \varphi(\gamma(x_{k-1})) = \varphi'(\eta_k)(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1}))$$



und da

$$\sum_{k=1}^n [\varphi(\gamma(x_k)) - \varphi(\gamma(x_{k-1}))] = \varphi(x_n) - \varphi(x_0)$$

$$\Rightarrow \varphi(\gamma(x_n)) - \varphi(\gamma(x_0)) = \sum_{k=1}^n \varphi'(\eta_k)(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1}))$$

Sei nun $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ irgend ein zu Z gehörender Zwischenvektor und $\xi_k = \gamma(\tau_k)$.

Dann wird

$$\sum_{k=1}^n \varphi'(\xi_k)(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})) \approx \sum_{k=1}^n \varphi'(\eta_k)(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1}))$$

sein, wenn φ' und γ "vernünftig" sind und Z fein genug.

Man erkennt, dass sich $\varphi(\gamma(x_n))$ aus $\varphi(\gamma(x_0))$ und φ' mittels eines wohldefinierten Grenzprozesses erkennen lässt.

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $S(Z, f) = \sum_{k=1}^n f(\gamma(\xi_k))(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1}))$

Der Grenzwert von $S(Z, f)$ mit $|Z| \rightarrow 0$ wird mit $\int_{\gamma} f \cdot dx$ bezeichnet und das Wegintegral von f längs γ genannt.

Dieses Integral läßt sich als Summe von Riemann-Stieltjes-Integralen berechnen und zwar ist

$$\int_{\gamma} f \cdot dx = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \cdot d_{j\gamma}(t)$$

Für stetig diffb. γ gilt

$$\int_{\gamma} f \cdot dx = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_j(t) dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Bemerkung:

i) Mit $T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$ erhalten wir $\int_{\gamma} v dx = \int_a^b \underbrace{(v(\gamma(t)) \cdot T(t))}_{\rightarrow R} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{\gamma} (vT) ds$

ii) Analog zu i) kann man im \mathbb{R}^3 auch nur die Normalenkomponente betrachten.

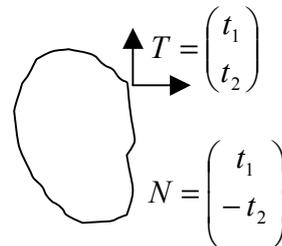
Man definiert $N(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T(t)$

Man definiert den Fluß von v durch γ

$$\oint_{\gamma} v dn = \oint_{\gamma} (v \cdot N) ds$$

iii) Für geschlossene Kurven schreibt man häufig

$$\oint_{\gamma} f ds \text{ bzw. } \oint_{\gamma} f \cdot dx$$



Das Potential eines Gradientenfeldes

Analog zum eindimensionalen Fall liefert das Kurvenintegral das geeignete Mittel zu einer Ableitung Δf einer Funktion f in mehreren Veränderlichen eine Stammfunktion zu konstruieren. Das Analogon zu zusammenhängenden Intervallen in R ist im R^n das Gebiet.

Definition: $G \subset R^n$ heißt Gebiet, falls G offen und zusammenhängend ist. (Man beachte, G heißt offen, falls es zu jedem $x \in G$ eine ε -Umgebung $U_\varepsilon(x) \subset G$ gibt.)
 G wird als zusammenhängend bezeichnet, wenn es zu je zwei Punkten x_1 und x_2 aus G einen stkw. glatten Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ mit $\gamma(a) = x_1$ und $\gamma(b) = x_2$.

Satz: Sei $G \subset R^n$ -Gebiet und $V: G \rightarrow R^n$ ein stetiges Gradientenfeld mit Stammfunktion ($v = \Delta f$).

Dann gilt für jeden stkw. glatten Weg γ mit Bild in G und Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$

$$\int_\gamma v \cdot dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Beweis:
$$\int_\gamma v \cdot dx = \int_\gamma (\nabla f) dx = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \left(\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right) dt = f(\gamma(t)) \Big|_{t=a}^b$$

Bei mehreren aneinander hängenden Kurvenstücken ist dies für jedes Teilstück anzuwenden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_\gamma v \cdot dx &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(x_{k-1})) + f(\gamma(x_{k-1})) - f(\gamma(x_k)) + \dots \\ &+ f(\gamma(x_1)) - f(\gamma(x_a)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Beispiel: Das Feld $E: R^3 \rightarrow R^3$ mit $E(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3z^2x + 3y \end{pmatrix}$ besitzt das Potential

$U(x, y, z) = -(x^2y + xz^3 + 3zy)$. Es gelte $v = \nabla f$, dann bezeichnet man $U = -f$ als Potential von V .

Es gilt für glatten Weg γ zw. $x_0 = (1, 1, 1)$ und $x_1 = (3, 4, 3)$

$$\int_\gamma E dx = - \int_\gamma \nabla U dx = -(U(x_1) - U(x_0)) = -(-471 - (-5)) = 466$$

Das Integral ist Weg unabhängig.

Welche Eigenschaften besitzen denn nun Kurvenintegrale, wenn der Integrand v ein Potential besitzt?

Satz: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v \in C(G, \mathbb{R}^n)$

Dann ist äquivalent:

- i) v ist ein Potentialfeld
- ii) Für alle glatten Wege in G hängt $\int_{\gamma} v dx$ nur von Anfangs- und Endpunkt ab. (Man bezeichnet das Integral als wegunabhängig)
- iii) Für alle geschlossenen und glatten Wege γ in G gilt $\oint_{\gamma} v dx = 0$

Beweis: Bis auf (iii) \rightarrow (i) sind alle Folgerungen einfach zu zeigen

Zu $x, x_0 \in G$ definieren wir $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \int_{x_0}^x v dx := \int_{\gamma} v dx$$

mit beliebigen x, x_0 verbindenden regulären Kurven in G .

Zu zeigen ist nun $\nabla f = v$.

$$f(x + he_1) - f(x) = \int_x^{x+he_1} v dx = \int_0^h v_1(x + te_1) dt = v_1(x + \xi e_1) \cdot t_1$$

(Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Damit folgt $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = v_1$

Ebenso $\frac{\partial f}{\partial x_i} = v_i \quad i = 2, \dots, n$

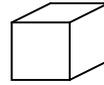
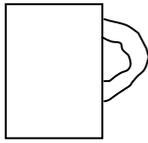
Wann existiert nun zu einem stetig diffbaren Vektorfeld $v : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Potential?

In der Umgebung eines Punktes erkennt man dies an der Symmetrie der Jakobi-Matrix.

$$J_v(x) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \right) = \begin{pmatrix} \nabla v_1 \\ \nabla v_2 \\ \nabla v_3 \end{pmatrix}$$

Definition: Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene, doppelptfreie Kurve in G stetig auf einen Punkt in G zusammengezogen werden kann, ohne dass G verlassen wird.

- Beispiel:**
- i) Jedes Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ "ohne Loch" ist einfach zusammenhängend
 - ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend
 - iii) $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend
 - iv) \mathbb{R}^3 ohne endlich viele Punkte ist einfach zusammenhängend



Nicht einfach zusammenhängend

einfach zusammenhängend

Satz: 2. Hauptsatz der Kurvenintegrale

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

Ein Vektorfeld $v \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ ist genau dann ein Potentialfeld wenn

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, \dots, n) \text{ erfüllt ist, d.h. } J_v(x) = J_v^T(x)$$

Diese Bedingung wird auch als Integrierbarkeitsbedingung bezeichnet.

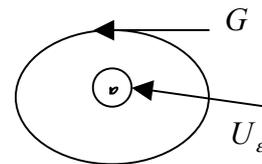
Beweis: Mit dem Satz von Schwarz folgt aus $v = \nabla f$ die Symmetrie der Jacobi-Matrix.

Gegeben sei nun von $J_v(x) = J_v^T(x) \quad \forall x \in G$.

Zu $x \in G$ und zu jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(x) \subset G$ können wir mit

$$f(x) = \int_0^1 v(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) dt$$

explizit ein Potential zu v angeben.



Hier für

$$\begin{aligned} \nabla f &= \int_0^1 \nabla \left[v(\underbrace{x_0 + t(x - x_0)}_{\gamma(t)})(x - x_0) \right] dt = \int_0^1 [t \cdot J_v^T(\gamma(t)) \cdot (x - x_0) + v(\gamma(t))] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t \cdot v(\gamma(t))] dt = [t \cdot v(\gamma(t))]_0^1 = v(x) - 0 = v(x) \end{aligned}$$

Für beliebiges $x \in G$ wählt man als Integrationsweg γ einen Streckenzug. Es bleibt zu zeigen, dass $f(x)$ nicht vom gewählten Streckenzug abhängt, was wir jedoch nicht beweisen werden.

Beispiel: Die auf $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definierte Funktion $v(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ erfüllt auf

ganz G die Bedingung $\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y}$, es existiert jedoch kein Potential. Nach

obigem Satz müsste $\oint_T v dx = 0$ sein. Auf dem Kreis $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$$(0 \leq t \leq 2\pi), \quad \dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\oint_T v dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -y & x \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\dot{\gamma}(t)} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$



Bemerkung: Im R^3 ist $J_v(x) = J^T(x)$ gleichbedeutend mit

$$\operatorname{rot} v = \nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Wie bestimmt man im praktischen Fall ($n=3$) ein Potential zu einem gegebenen Vektorfeld?

A) Methode mit Kurvenintegral

1. Schritt: Besitzt $v \in (G, R^3)$ ein Potential?

$\operatorname{rot} v \neq 0$ für ein $x \in G \Rightarrow$ kein Potentialfeld \Rightarrow fertig!

2. Schritt: G einfach zusammenhängend und $\operatorname{rot} v = 0$

Man wählt $x_0 \in G$ fest und zu jedem $x \in G$ eine geeignete Kurve γ in G , die x_0 mit x verbindet.

$$f: G \rightarrow R, f(x) := \int_{\gamma} v dx \text{ eine Stammfunktion}$$

Bem.: Einfache Wege sind der Streckenzug von x_0 nach x oder stkw. parallel zu den Koordinatenachsen verlaufende Streckenzüge.

B) Ansatzmethode

Man löst die drei partiellen Dgl. $\nabla f = v$, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = v_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = v_2, \frac{\partial f}{\partial x_3} = v_3$$

1. Schritt: Ist G einfach zusammenhängend?

Wenn ja, kann mit $\operatorname{rot} v \stackrel{!}{\neq} 0$ entscheiden werden, ob v ein Potential besitzt.

2. Schritt: (In der folgenden Vorgehensweise kann die Integrationsreihenfolge nach x, y, z beliebig vertauscht werden)

$$f(x, y, z) = \int_{v_1} (x, y, z) dz + c(y, z) \quad \otimes$$

wobei die Integrationskonstante von y und z abhängen darf

3. Schritt: $f_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \int v_1(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial y} c(y, z) \stackrel{!}{=} v_2$

4. Schritt: Unbestimmte Integration nach y liefert mit

$$c_g(y, z) = g(y, z) = v_2 - \int \frac{\partial v_1}{\partial y} dx$$

$$c(y, z) = \int g(y, z) dy + d(z)$$

daher hängt die Integrationskonstante d von z ab.

Einsetzen in \otimes liefert

$$f(x, y, z) = \int v_1(x, y, z) dx + \int g(y, z) dy + d(z)$$

5. Schritt: Differentiation nach z liefert

$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \int v_1(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial z} \int g(y, z) dy + \frac{\partial}{\partial z} d(z) \stackrel{!}{=} v_3$$

$$d'(z) = v_3 - \frac{\partial}{\partial z} \int v_1(x, y, z) dx - \frac{\partial}{\partial z} \int g(y, z) dy$$

6. Schritt: Unbestimmte Integration nach z liefert

$$h(z) := d'(z) \text{ und } d(z) = \int h(z) dz$$

und somit

$$f(x, y, z) = \int v_1(x, y, z) dx + \int g(y, z) dy + \int h(z) dz$$

$$g(y, z) = v_2 - \frac{\partial}{\partial y} \int v_1 dx, \quad h(z) = v_3 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\int v_1 dx + \int g dy \right)$$

Einfache Form des Kochrezepts zu Methode B)

Gesucht: f mit $\nabla f = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

- 1) Prüfe $J_v(x) = J_v(x)^T$ ($x \in G \subset \mathbb{R}^3$)
Wenn ja, fahre fort mit 2, ansonsten fertig!
- 2) Bestimme $a(x, y, z) = \int v_1 dx$
- 3) Bestimme $b_y(x, y, z) := v_2(x, y, z) - \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial y}$
Falls b_y von x abhängt \rightarrow Rechenfehler!
- 4) Bestimme $b(y, z) = \int b_y dy$
- 5) Bestimme $c_z(z) := v_3(x, y, z) - \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial b(y, z)}{\partial z}$
Falls c_z von x oder y abhängt \rightarrow Rechenfehler!
- 6) Bestimme $c(z) = \int c_z dz$
 $f(x, y, z) = a(x, y, z) + b(y, z) + c(z)$

Bsp.: $G = \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \cos x \\ 2y \sin x + e^{2z} \\ 2ye^{2z} \end{pmatrix}$

1. Schritt: $J_v(x) = \begin{pmatrix} -y^2 \sin x & 2y \cos x & 0 \\ 2y \cos x & 2 \sin x & 2e^{2z} \\ 0 & 2e^{2z} & 4ye^{2z} \end{pmatrix}$ (Diagonalelemente

müssen nicht berechnet werden)

2. Schritt: $a(x, y, z) = \int y^2 \cos x dx = y^2 \sin x$

3. Schritt: $b_y(y, z) = 2y \sin x + e^{2z} - 2y \sin x = e^{2z}$

4. Schritt: $b(y, z) = \int e^{2z} dy = ye^{2z}$

5. Schritt: $c_z(z) = 2ye^{2z} - 0 - 2ye^{2z} = 0$

6. Schritt: $c(z) = \int c_z dz = \bar{c}$

$$f(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + \bar{c}, \quad \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \cos x \\ 2y \sin x + e^{2z} \\ 2ye^{2z} \end{pmatrix}$$

Bsp.: $y = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \sin x \\ 0 \end{pmatrix} \quad J_v(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3y \cos x & \dots & \dots \end{pmatrix}$

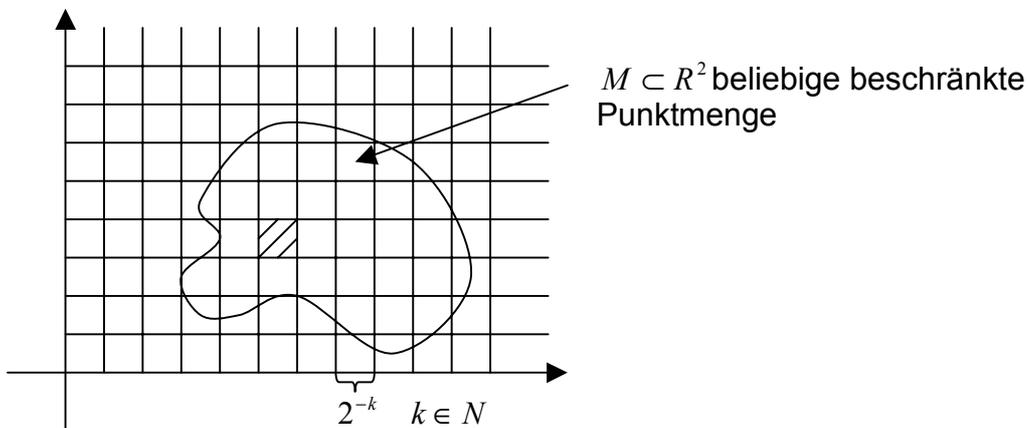
Hier testen wir nicht die Symmetrie von $J_v(x)$!

2) $a(x, y, z) = \int 3x dx = \frac{3}{2}x^2$

3) $b_y(y, z) = 3y \sin x - 0$ \swarrow $b_y(y, z)$ hängt von x ab!
 Fertig! Es existiert \searrow
 Kein Potential zu v !

Integration in ebenen Bereichen

Welche Bereiche kann man einen Flächeninhalt zuordnen?



Sei $k \in \mathbb{N}$. Durch das Gitter achsenparalleler Koordinatenlinien $x = n \cdot 2^{-k}$ wird die (x,y) -Ebene in Quadranten mit dem Flächeninhalt 2^{-2k} zerlegt.

$s_k(M) :=$ Flächeninhalte aller Quadrate, die ganz (einschließlich des Randes) in M liegen

$S_k(M) :=$ Flächeninhalt aller Quadrat, die mindestens einen Punkt in M haben

Folglich gilt: $s_k(M) \leq S_k(M)$, $s_k(M) \leq s_{k+1}(M)$, $S_{k+1}(M) \leq S_k(M)$

$S_1 \leq c$: $s_1(M) \leq S_1(M)$, $s_k(M) \leq s_{k+1}(M) \Rightarrow$ monoton wachsend

$s_k(M) \leq S_k(M) \leq S_0(M) \Rightarrow (S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt

Folglich existieren die Grenzwerte

$F_i(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(M)$

$F_a(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(M)$

Definition: Ein beschränkter Bereich heißt Riemann-messbar, falls $F_i(M) = F_a(M)$.

In diesem Fall ist $F(M) = F_i(M) (= F_a(M))$ der Flächeninhalt von M .

Bemerkung: $M = \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, 1]^2, x, x \in Q\}$

Es gilt $F_a(M) = 1, F_i(M) = 0$

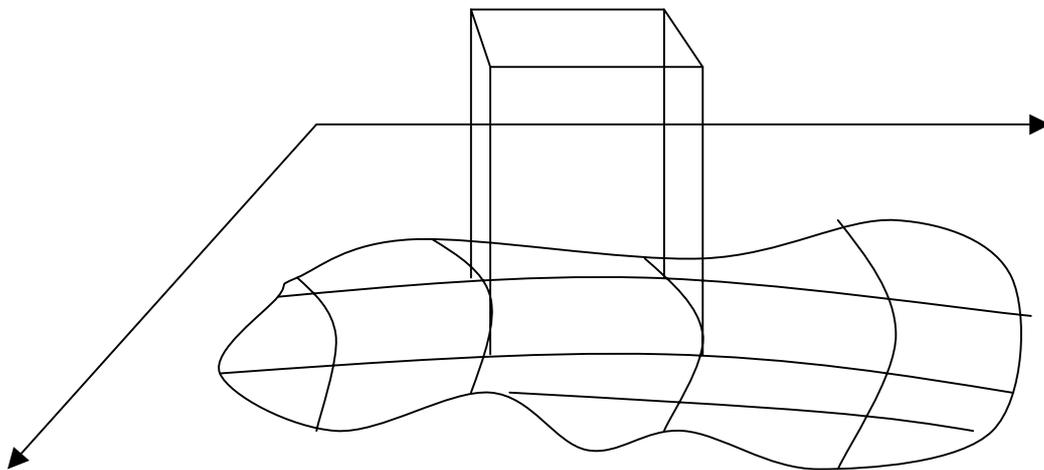
\Rightarrow nicht Riemann-messbar

Satz: Ein beschränktes Gebiet (Gebiet $\hat{=}$ offen, zusammenhängend) $G \subseteq R^2$ mit stückweise glattem Rand besitzt einen Flächeninhalt

$$F = \lim_{k \rightarrow 0} s_k(G) = \lim_{k \rightarrow 0} S_k(G)$$

Definition: Ein Bereich aus R^2 heißt regulär, wenn

- i) der Rand ∂B stkw. glatt ist
- ii) das Innere $B \setminus \partial B$ ein nicht leeres, beschränktes Gebiet in R^2 ist
- iii) B abgeschlossen ist.



$$(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in B_i$$

Netz regulärer Bögen zerlegt B in n Teilbereiche B_i

$$\delta(B_i) = \inf_{r \in R} \{B_i \subset U_r(x), x \in B_i\}$$

$\delta(B_i)$ Durchmesser von B_i , Flächeninhalt von B_i ist ΔF_i

Wir definieren die Riemann-Summe

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta F_i \quad ((\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in B_i, 1 \leq i \leq n)$$

Es sei $B \subset R^2$ regulärer Bereich und $f : B \rightarrow R$ beschränkt. Dann konvergieren bei ständiger Verfeinerung unabhängig von den einzelnen Zerlegungsfolgen und den gewählten $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in B_i$ die Riemann-Summe gegen einen festen Grenzwert. Die Verfeinerung erfülle

$$\delta_{\max} := \max\{\delta(B_i); 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Der gemeinsame Grenzwert wird mit $\int_B f dF$ bezeichnet und heißt (Gebiets-) Integral von f über B und dF das Flächenelement.

$$\int_B f dF = \lim_{\delta_{\max} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n(\delta_{\max})} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta F_i$$

Satz: Für das Gebietsintegral gelten ($f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt)

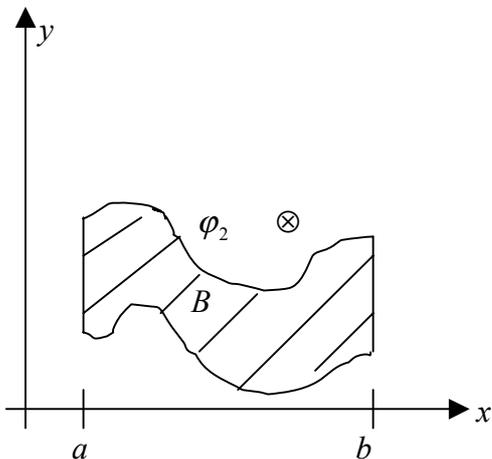
- i) $\int_B (\alpha f + \beta g) dF = \alpha \int_B f dF + \beta \int_B g dF \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
- ii) $f(x, y) \leq g(x, y) \quad ((x, y) \in B) \Rightarrow \int_B f dF \leq \int_B g dF$
- iii) $\int_B f dF = \int_{B_1} f dF + \int_{B_2} f dF$, falls B durch eine glatte Kurve in zwei Teilbereiche B_1 und B_2 zerlegt wird.

Mittelwertsatz: Sei B zusammenhängend und abgeschlossen. Dann gibt es zu jeder stetigen Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ einen Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) \in B$ mit

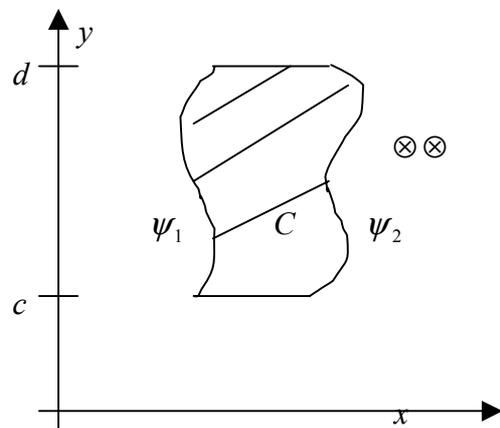
$$\int_B f dF = f(\bar{x}, \bar{y}) \int_B dF$$

Berechnung des Flächenintegrals

Unter einem Normalbereich bzgl. der x -Achse versteht man eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ der Form $B = \{(x, y); a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, wobei φ_1, φ_2 stetig Funktionen auf $[a, b]$ sind mit $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \quad (x \in [a, b])$



Normalbereich bzgl. x -Achse



Normalbereich bzgl. y -Achse

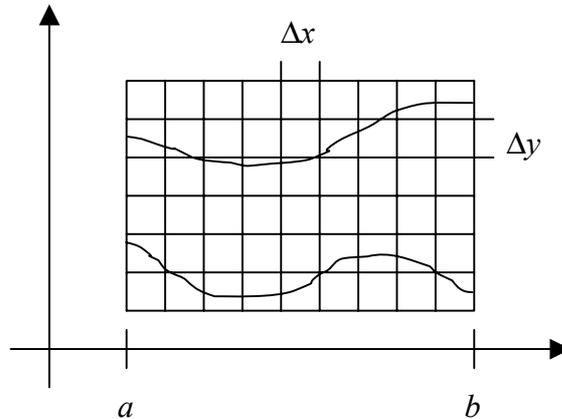
Satz: Ist f stetig auf dem Normalbereich $B \subset \mathbb{R}^2$ bzgl. der x -Achse in \otimes , so haben wir

$$\int_B f(x, y) dF = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dx \right) dy$$

Analog gilt für $\otimes \otimes$

$$\int_B f(x, y) dF = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dx \right)$$

Beweis:



Mit $B_{1,k}, \dots, B_{n_k,k}$ berechnen wir die Rechtecke in der k -ten Spalte mit Breite Δx . Mit

$(x_k^*, k_{ik}^*) \in B_{ik}$ bilden wir

$$\otimes \left(\sum_{k=1}^m f(x_k^*, k_{ik}^*) \Delta y \right) \Delta x$$

die von $\overline{\Delta y \rightarrow 0} \int_{\varphi_1(x_k^*)}^{\varphi_2(x_k^*)} f(x_k^*, y) dy$

$$S_M := \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta F_i \text{ (siehe oben)}$$

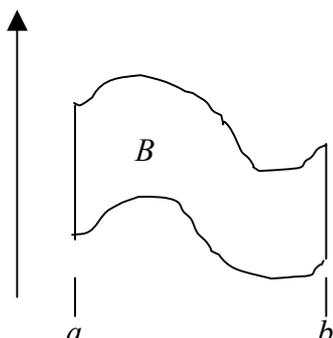
nur die Anteile in den Randstreifen unterscheidet. Für $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \rightarrow 0$ strebt dieser Unterschied gegen 0.

Die innere Summe strebt für $\Delta y \rightarrow 0$ gegen

$$\int_{\varphi_1(x_k^*)}^{\varphi_2(x_k^*)} f(x_k^*, y) dy$$

Beim Grenzübergang $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \rightarrow 0$ strebt als Doppelsumme gegen

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



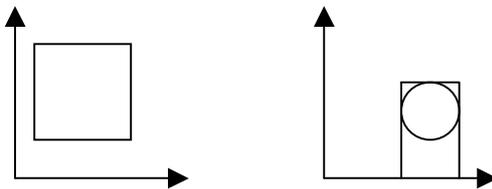
Bemerkung: Der Normalbereich B sei durch mehrere achsenparallele Linien in mehrere Normalbereiche B_1, \dots, B_n zerlegt. Dann gilt mit der Additivität des Integrals und obigem Satz

$$\begin{aligned} \int_B f dF &= \int_{B_1} f dF + \dots + \int_{B_n} f dF \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

Bemerkung: Zerlegung von B in Normalbereiche ist nicht eindeutig
Ist B sowohl ein Normalbereich bzgl. der x -Achse als auch der y -Achse,

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\} \end{aligned}$$

Bsp.:



$$\text{Dann gilt } \int_B f(x, y) dF = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Für Rechtecke

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

gilt nun

$$\int_R f dF = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Satz von Fubini :

Ist f auf R integrierbar und existiert

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (y \in [c, d])$$

So ist g auf $[c, d]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_R f(x, y) dF = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge

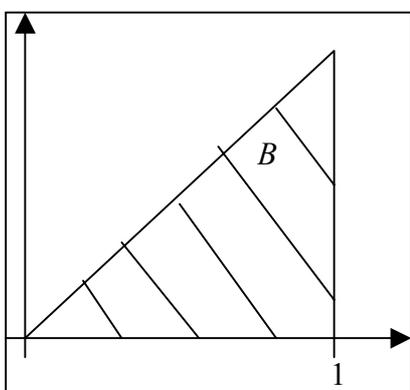
Ist die Funktion f auf $R = [a, b] \times [c, d]$ integrierbar und existieren $\int_a^b f(x, y) dx$ ($y \in [c, d]$)

und $\int_c^d f(x, y) dy$ ($x \in [a, b]$) so gilt

$$\int_R f dF = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Bemerkung: Die Voraussetzung des Satz sind erfüllt, falls f stetig ist.

Bsp.:



$$\varphi_1(x) = 0$$

$$\varphi_2(x) = 0 \quad \downarrow y = x \text{ Gerade}$$

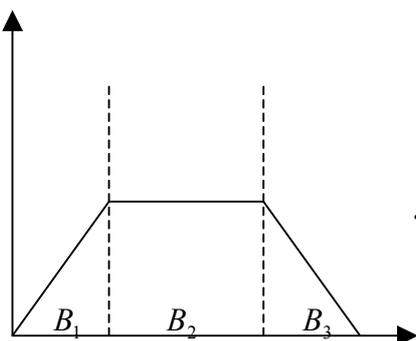
$$\left(\frac{1}{2}\right) \int_B f dF = \int_0^1 \underbrace{\int_0^x 1 dy}_{x} dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_B y x dF = \int_0^1 \int_0^y x y dy dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \Big|_0^x \right] dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8}$$

$$\int_B 1 dF = \int_0^1 \underbrace{\int_y^{1-y} 1 dx}_{1-y} dy$$

$$\psi_1(y) = y \quad \psi_2(y) = 1$$

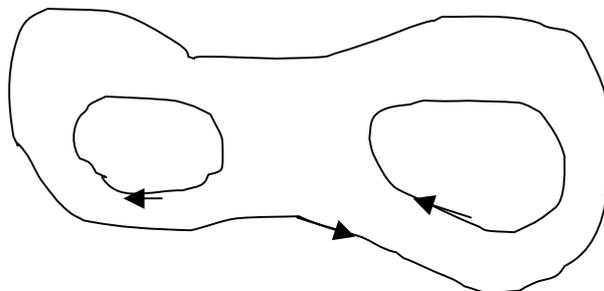
$$\psi_1(y) = 0 \quad \psi_2(y) = 1 - y$$



$$\int_B f dF = \int_{B_1} f dF + \int_{B_2} f dF + \int_{B_3} f dF$$

Satz von Green (Gaußscher Integralsatz in der Ebene)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein regulärer Bereich, dessen Rand ∂B aus endlich vielen, geschlossenen, stückweise glatten Bögen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Die Bögen seien so parametrisiert, daß B stets links zur Durchlaufrichtung liegt.



$$\int_{\partial B} \vec{v} d\vec{x} = \int_{\gamma_1} \vec{v} d\vec{x} + \dots + \int_{\gamma_n} \vec{v} d\vec{x}$$

Satz von Green (1793-1841)

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $B \subset D$ und ∂B wie oben beschrieben.

Dann gilt für jedes $v \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$

$$\int_B \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} dF = \int_{\partial B} v d\vec{x}$$

Bew.: Betrachten wir zuerst den Spezialfall $v_2(x, y) = 0$ und B ist ein Normalbereich bzgl. der x -Achse.

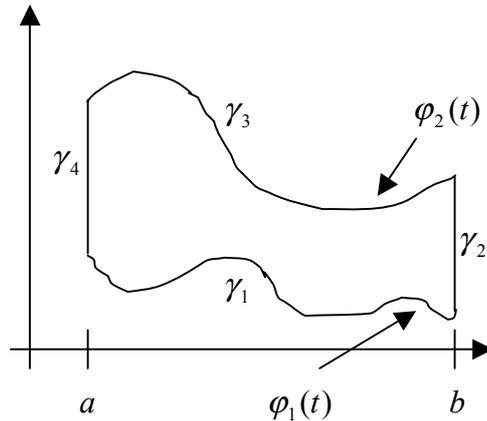
Der Rand besteht aus

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix} \quad a \leq t \leq b$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \quad \varphi_1(b) \leq t \leq \varphi_2(b)$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \quad a \leq t \leq b$$

$$\gamma_4(t) = \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} \quad \varphi_1(a) \leq t \leq \varphi_2(a)$$



wobei γ_3, γ_4 entgegengesetzt durchlaufen werden

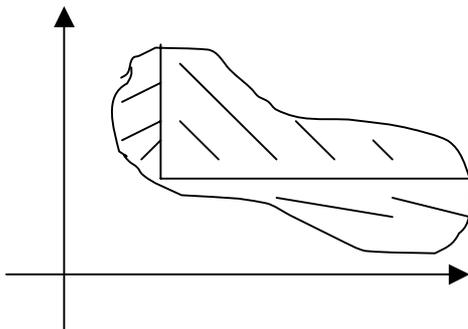
Mit $v_2 = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} v d\vec{x} &= \int_{\gamma_1} v_1 d\vec{x} + \int_{\gamma_2} v_1 d\vec{x} - \int_{\gamma_3} v_1 d\vec{x} - \int_{\gamma_4} v_1 d\vec{x} \\ &= \int_a^b v_1(t, \varphi_1(t)) dt + 0 - \int_a^b v_1(t, \varphi_2(t)) dt - 0 \\ &= \int_a^b v_1(t, \varphi_1(t)) dt - \int_a^b v_1(t, \varphi_2(t)) dt \\ &= - \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial v_1}{\partial y} dy \right) dx = \int_B \frac{\partial v_1}{\partial y} dF \end{aligned}$$

Eine analoge Betrachtung liefert für einen Normalbereich bzgl. der y -Achse mit v_0

$$\int_{\partial B} v d\vec{x} = \int_B \frac{\partial v_2}{\partial x} dF$$

Man beachte nun, daß sich jeder Normalbereich bzgl. der x -Achse in Normalbereiche bzgl. der y -Achse zerlegen läßt und umgekehrt



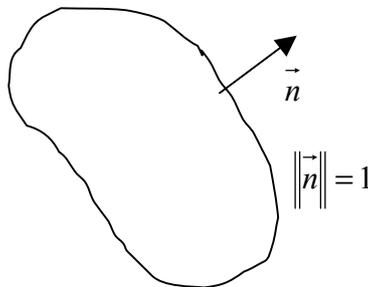
Da die Kurvenintegrale über die Hilfslinien umgekehrtes Vorzeichen haben, heben sich diese auf.
 Durch Addition der beiden Spezialfälle ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Bemerkung: Mit $v_1 = 0, v_2 = x$ bzw. $v_1 = -y, v_2 = 0$ ergibt sich der Spezialfall

$$\int_B dF = \int_{\partial B} xdy = \int_{\partial B} -ydx = \frac{1}{2} \int_{\partial B} xdy - ydx$$

Satz von Green: Es sei $u \in C^2(D, R)$

$$\text{Dann gilt } \int_B \Delta u dF = \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$$



Beweis: Wir setzen $v_1 = -\frac{\partial u}{\partial y}$ und $v_2 = \frac{\partial u}{\partial x}$. Dies liefert

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =: \Delta u$$

Mit dem Green'schen Satz erhalten wir nun

$$\int_B \Delta u dF = \int_{\partial B} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_{\partial B} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{gradu}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{y}(s) \\ -\dot{x}(s) \end{pmatrix}}_{=n} ds =$$

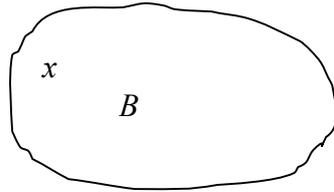
stets nach außen
weisende Normalvektor

$$= \int_{\partial B} \nabla u \cdot n \cdot ds = \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

Bemerkung: Sei $u \in C^2(D, R)$. Gilt $\Delta u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D$,

$$\text{dann folgt } \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

Beispiel:



Bestimme $\int_{\partial B} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} ds$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \Delta \ln(x^2 + y^2) &= \operatorname{div} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= 2 \left(\underbrace{\frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}}_{2. \text{ Abl.}} + \underbrace{\frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}}_{2. \text{ Abl.}} \right) = 0 \text{ f\"ur } (x, y) \neq 0 \end{aligned}$$

Liegt $x \in \overline{D}$. Dann gilt

$$\int_{\partial B} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} ds = 0$$

Sei $x \in D$

$$\int_{\partial B} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} ds = - \int_{\gamma} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} ds + \underbrace{\int_{\partial B \cup \gamma} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} ds}_{=0}$$

$$\gamma(t) = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

f\"ur $(x, y) = \gamma(t)$ gilt $\frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} = \frac{2}{\varepsilon}$

Damit folgt

$$\int_{\partial B} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} ds = \int_0^{2\pi} \frac{2}{\varepsilon} dt = -4\pi$$