II Integration (1D)

Problem: Auf $I \subset R$ sie f gegeben, von der wir wissen, daß sie Ableitung einer Funktion F ist, d.h. $F' = f$ auf I.
Gesucht ist F.

Könnten wir auf irgend eine Weise eine Stammfunktion F_0 zu f auf I gewinnen so gibt es ein $C \in R$ mit $F - F_0 = C$. Könnten wir zusätzlich noch einen Wert von F an einer beliebigen Stelle $x_0 \in I$ angeben, so muß $C = F(x_0) - F_0(x_0)$ und somit $F(x) = F_0(x) + (F(x_0) - F_0(x_0))$ gelten. Zwei wesentliche Fragestellungen warten nun auf uns:

i) Wie kann man eine Funktion F aus ihrer als bekannt angenommenen Ableitung wieder gewinnen?
ii) Wie kann man einer gegebenen Funktion ansehen, ob sie einen Stammfunktion besitzt?

<u>Unbestimmte Integrale</u>

Ist F auf $I \subset R$ eine Stammfunktion zu f, d.h. $F'(x) = f(x)\ (x \in I)$ so bezeichnen wir F als <u>eine</u> Stammfunktion von f, bzw. unbestimmtes Integral von f auf I. Eine Funktion f unbestimmt über das Intervall I zu integrieren, bedeutet einfach, irgend eine Stammfunktion von f auf I zu berechnen.

Schreibweise:

$F(x) = \int f(x)dx$ auf I $\qquad \left(F = \int f dx \text{ auf } I\right)$

<u>Bemerkung:</u> $\int$ stilisiertes $\sum$

<u>Bemerkung:</u> Das Symbol $\int f(x)dx$ bezeichnet irgend eine Stammfunktion von f, d.h. es gilt auch für $C \in R$ $\int f(x)dx = F(x) + c$ auf I

<u>Bemerkung:</u> Aus $\int f(x)dx = F(x)$ und $\int f(x)dx = G(x)$ folgt nicht $F(x) = G(x)$ auf I

Die bestimmte Integration ist die Umkehrung der Differentiation, d.h. für $x \in I$ gilt:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x) \text{ und } \int \frac{d}{dx} f(x)dx = f(x) + c \qquad \otimes$$

vorausgesetzt es existiert eine Stammfunktion $\int f(x)dx$ und f ist diffbar.
Eine Beziehung

$$\int f(x)dx = F(x) \text{ auf } I$$

kann somit immer durch Differentiation überprüft werden. Mit $\otimes$ erkennt man daß jede Differentiationsformel sofort eine Integrationsformel liefert.
z.B.:

$$C(x)' = c \Rightarrow \int C(x)'dx = \int c dx = cx \text{ auf } R\ (c \in R)$$

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha} \Rightarrow \int x^{\alpha}dx = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'$$ falls $\alpha \in N$ $(-\infty,0)$ und $(0,\infty)$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$ auf $(-\infty,0)$ und $(0,\infty)$

$\int e^x dx = e^x$ auf R

$\int \sin x dx = -\cos x, \int \cos x dx = \sin x$ auf R

$\int \sinh x dx = \cosh x, \int \cosh x dx = \sinh x$ auf R

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$ auf R

Rechenregeln für unbestimmte Integration

Wir treffen die folgende Verabredung

I. Die folgenden Formeln gelten für alle Intervalle I auf denen die rechten Seiten existieren.

II. Treten Ableitungen auf, so wird deren Existenz stillschweigend vorausgesetzt.

III. F bezeichnet durchgehen eine Stammfunktion zu f.

Dann gelten:

$$\int \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n dx = \alpha_1 \int f_1 dx + ... + \alpha_n \int f_n dx$$

$$\int fg dx = Fg - \int Fg' dx$$

$$\int (f \circ g) g' dx = F \circ G \qquad \left(\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))\right)$$

$(\otimes\otimes)$

Zwei Spezialfalle der letzten Regeln sind:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)|$$

Substitutionsregel II.1:

Sein $f: I \to R, g(I_0) = I$ mit $g(x) \neq 0$ $(x \in I_o)$ und $(f \circ g)g'$ besitze auf I_0 eine Stammfunktion Φ. Dann existiert eine Umkehrung g^{-1} von g auf I und $F(x) = \Phi(g^{-1}(x))$ ist dort eine Stammfunktion von f, kurz

$$\int f(x)dx = \left\lfloor \int f(g(t))g'(t)dt \right\rfloor_{t=g^{-1}(x)}$$

Daher sei

$$[\varphi(t)]_{t=\psi(x)} := \varphi(\psi(x))$$

Bew. folgt 1.Seite

Regeln: Man setze $\int f(x)dx$ einfach $x = g(t); dx = g'(t)$ und werte das entstehende Integral $\int f(g(t))g'(t)dt$ aus und im Ergebnis ersetzt man t durch $g^{-1}(t)$.

Beispiel II.2: $\int \frac{dx}{\sin x}$ Die Substitution $x = \arctan t$ liefert $g(t) = 2\arctan t$

mit $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ und $\sin x = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$

$$\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2(1+t^2)}{2t(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| \text{ auf } (-\infty,0) \text{ und } (0,\infty)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left[\int \frac{dt}{t}\right]_{t=\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| \text{ auf } (-\pi,0) \text{ und } (0,\pi)$$

Beispiel II.3: $\int \cos(3x+1)dx \Rightarrow t = 3x+1, x = \frac{t-1}{3}, dx = \frac{1}{3}dt$

$$\frac{1}{3}\int \cos(t)dt = \frac{1}{3}\sin(t)$$

Also ist

$$\int \cos(3x+1)dx = \left[\frac{1}{3}\sin(t)\right]_{t=3x+1} = \frac{1}{3}\sin(3x+1)$$

Beispiel II.4: $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx \,\hat{=}\, \int f \cdot f' dx$

$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx \,\hat{=}\, \frac{1}{2}\arctan^2 x$, da $\int fFdx = FF - \int Ffdx \Rightarrow 2\int Ffdx = (F)^2$

Die Partialbruchzerlegung

Für die Integration einer echten gebrochenen rationalen Funktion ist deren Zerlegung in Partialbrüche sehr wichtig.

Gehen wir aus von einen rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Die Polynome haben keinen gemeinsamen Polynomfaktor. Des weiteren gelte $grad\ p(x) < grad\ q(x)$.

Kochrezept zu Berechnung einer Partialbruchzerlegung

1.Schritt: Bestimmen der Produktdarstellung von $q(x)$.

$q(x) = a(x-x_1)^k \cdot ... \cdot (x-x_n)^{k_n} \cdot q_1(x)^{l_1} \cdot ... \cdot q_m(x)^{l_m}$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen $x_1,...,x_n$ und den Vielfachheiten $k_1,...,k_n$

und verschiedenen quadratischen Polynomen $a_i(x)$, die in R keine Nullstellen besitzen, mit Potenzen l_i $(1 \le i \le m)$.

<u>2.Schritt:</u> Partialbruchansatz

Zu jedem Linearfaktor $(x - x_i)$ von $q(x)$ der Vielfachheit k_i und zu jedem quadratischem Faktor $q_i(x)$ der Vielfachheit l_i wählt man nun als Ansatz Funktion der Form

$$\frac{A_{i,1}}{(x-x_i)}, \frac{A_{i,2}}{(x-x_i)^2}, \ldots, \frac{A_{i,k_i}}{(x-x_i)^{k_i}} \quad \frac{B_{i,1}+C_{i,1}}{q_1(x)}, \frac{B_{i,2}+C_{i,2}}{q_2(x)^2}, \ldots, \frac{B_{i,l_i}+C_{i,l_i}}{q_i(x)^{l_i}}$$

Diese Funktionen werden als Partialbrüche von $\frac{p(x)}{q(x)}$ bezeichnet. Ziel ist es nun $\frac{p(x)}{q(x)}$ als Summe solcher Partialbrüche darzustellen

<u>3.Schritt:</u> Koeffizientenbestimmung

$$\frac{x^2-1}{(x-3)^3} = \frac{A_1}{(x-3)} + \frac{A_2}{(x-3)^2} + \frac{A_3}{(x-3)^3}$$:Multiplikation mit dem Nenner $q(x)$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = A_1(x-3)^2 + A_2(x-3) + A_3$$

$$= \underset{=1}{A_1} x^2 + x(-6A_1 + \underset{=6}{A_2}) + (-3A_2 + \underset{=8}{A_3} + 9A_1)$$

Koeffizienten vergleichen

Einsetzen bestimmter $X - Werte$

$x = 3 \Rightarrow A_3 = 8$

$x = 0 \Rightarrow 9A_1 - 3A_2 + 8 = -1$

$x = 1 \Rightarrow 4A_1 - 2A_2 + 8 = 0$

Das Bestimmen der Koeffizienten kann sowohl durch Einsetzen als auch durch Gleichsetzungsmethoden geschehen. Dazu multipliziert man zuerst die Ansatzgleichung mit $q(x)$. Daraus ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für $A_{i,j}, B_{r,s}, C_{r,s}$

<u>Beispiel:</u> Betrachten wir exemplarisch

$$f(x) = \frac{x^2+3}{(x-1)^2(x+1)}$$

Ansatzgleichung:

$$\frac{x^2+3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_{1,1}}{(x-1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-1)^2} + \frac{A_{2,1}}{(x+1)} \Big| \cdot (x-1)^2(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2 + 3 = A_{1,1}(x-1)^2(x+1) + A_{1,2}(x+1) + A_{2,1}(x-1)^2$$

$x = -1:\ 4 = 4A_{2,1}$ $\quad x = 1: 4 = 2A_{1,2}$ $\quad x = 0: 3 = -A_{1,1} + 2 + 1$

$1 = A_{2,1}$ $\quad 2 = A_{1,2}$ $\quad \Rightarrow A_{1,1} = 0$

Integration einer rationalen Funktion R(x)

!.Schritt: Mittels Partialbruchzerlegung wird $R(x)$ dargestellt in der Form:

$$f(x) = g(x) - \frac{p(x)}{g(x)}$$

mit den ganzen Polynom $g(x)$ und Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ die keinen gemeinsamen Polynomanteil besitzen.

2.Schritt: Man bestimmt die Partialbruchzerlegung von $\frac{p(x)}{q(x)}$.

Dabei verwendet man die folgende Formel

$$\int \frac{dx}{(x-a)} = \ln(x-a)$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} \qquad (k>1)$$

Im weiteren setzen wir $p^2 - 4q < 0$ voraus

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = \frac{a}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{2x+p}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{k-1}}$$

$$+\frac{2(2k-3)}{(k-1)(aq-p^2)}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}, (k>1)$$

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k} dx = -\frac{a}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

Integration von $R\left(e^{ax}\right)$

Es bezeichnet R eine rationale Funktion. In einem Integral der Form $\int R\left(e^{ax}\right)dx$ führt die Substitution $t = e^{ax}$, d.h. $x = \frac{1}{a}\ln t, dx = \frac{dt}{at}$ auf

$$\int R(e^{ax})dx = \left[\int R(t)\frac{dt}{at}\right]_{t=e^{ax}}$$

Beispiel:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \left[\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot t}\right]_{t=e^x} = \left[\int \frac{dt}{1+t^2}\right]_{t=e^x}$$

$$= [\arctan t]_{t=e^x} - \arctan e^x$$

Mit $R(x,y)$ soll im Folgenden ein rationaler Ausdruck in x und y sind, d.h. $R(x,y)$ entstehen aus x, y und Koeffizienten allein durch Multiplikation, Substitution, Addition und Division.

Integration von $R(\sin x, \cos x)$

Man substituiert

$$x = 2\arctan t \quad (t = \tan\frac{x}{2}), \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

und es gilt

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

Beispiel: $$\int\frac{dx}{\cos x} = \left[\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}dt\right]_{t=\tan\frac{x}{2}} = \left[\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_{t=\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|$$

Integration von $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}), (a \neq 0)$

Man substituiert mit $u = \alpha x + \beta, dx = \frac{1}{\alpha}du,$ so daß man eine Normalform der Form

$$\int R\left(u, \sqrt{u^2+1}\right)dx, \int R(u, \sqrt{u^2-1})dx, \int R(u, \sqrt{1-u^2})dx$$

Die Substitution $u = \sinh t, u = \cosh t$ bzw. $u = \sin t$ führt auf eine der Bekannten und schon behandelten Typen.

Beispiel: $$\int\sqrt{4x^2+12x+5}\,dx = \int\sqrt{\underbrace{\frac{4}{\alpha^2}(\alpha x+\beta)^2}+\underbrace{\left(\frac{12}{\alpha}-\frac{8\beta}{\beta}\right)(\alpha x+\beta)}+5+4\frac{\beta^2}{\alpha^2}-12\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$= 4x^2 + 8\frac{\beta}{\alpha}x + 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad 12x + 12\frac{\beta}{\alpha} - 8\frac{\beta}{\alpha}x - 8\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$12 = 8\frac{\beta}{\alpha} + \lambda a \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}(12 - 8\frac{\beta}{\alpha})$$

$$5 = a\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 12\frac{\beta}{\alpha} - 8\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \lambda \qquad \Rightarrow \lambda = 5 + 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 12\frac{\beta}{\alpha}$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{4}{\alpha^2}u^2 + \underbrace{\left(\frac{12}{\alpha} - 8\frac{\beta}{\alpha}\right)}u + \left(5 + 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 12\frac{\beta}{\alpha}\right)\right)du\right]_{u=\alpha x+\beta}$$

$$\overset{!}{=} 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\beta$$

$(\alpha > 0)$

$(\alpha = \frac{2}{3}\beta)$

$$= \left[\sqrt{\frac{a}{\alpha^3} \int u^2 + \frac{\alpha^2}{4} \underbrace{\left(5 + 4\frac{9}{4} - 12^{\frac{3}{2}} \right)} du} \right]_{u=\alpha x + \frac{3}{2}\alpha}$$

$$5 + 9 - 18 = -4$$

$$= \left[\frac{2}{\alpha^3} \int \sqrt{u^2 - \alpha^2}\, du \right]_{u=\alpha\left(x+\frac{3}{2}\right)} \overset{\alpha=1}{=} \left[2 \int \sqrt{u^2 - 1}\, du \right]_{u=\frac{2x+3}{2}}$$

$$= 2\left[\int \sqrt{\cosh^2(t) - 1} \cdot \sinh t dt \right]_{t=\operatorname{arccos} h\left(\frac{2x+3}{2}\right)}$$

$u = \cosh t$

$du = \sinh t dt$

$t = \operatorname{arccos} h(u)$

$$= 2\left[\int \sinh^2 t dt \right]_{t=\operatorname{arccos} h\frac{(2x+3)}{2}} =$$

$$\left\langle \frac{1}{2}\sinh x \cosh x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\cosh^2 x - 1}_{\sinh^2 x} + \sinh^2 x \right) = \frac{1}{2}\left(2\sinh^2 x\right) = \sinh^2 x \right\rangle$$

$$= \left[\sinh t \cosh t - t \right]_{t=\operatorname{arccos} h\left(\frac{2x+3}{2}\right)}$$

Integration von $R\left(x, \sqrt[k]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \delta}} \right), \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

Substitution $\quad t = \sqrt[k]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \delta}}$, d.h.

$$x = \frac{\delta t^k - \beta}{\alpha - \gamma t^k}, \quad dx = k(\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{t^{k-1}}{\left(\alpha - t^k \gamma\right)^2} dt$$

Bsp.: $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} dx = \left[\int \frac{1-t}{t^2 - t} 2t dt \right]_{t=\sqrt{x}} \qquad t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2tdt$

$$= \left[2\int \frac{1-t}{1+t} dt \right]_{t=\sqrt{x}} = \left[4\ln|t+1| - 2t \right]_{t=\sqrt{x}} = 4\ln\left|\sqrt{x} + 1\right| - 2\sqrt{x}$$

Das Riemannsche Integral

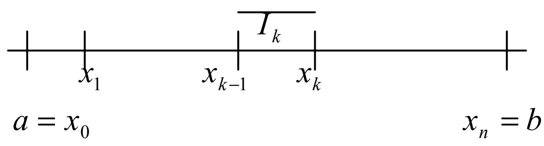
Betrachten wir folgende Situation: F sei diffb. auf $[a,b]$ und $f := F'$ sei ebenso bekannt wie der Anfangswert $F(a)$ kann man F(b) bestimmen.
Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$F(b) = F(a) + f(\eta)(b-a) \qquad \eta \in (a,b)$$

Aber wie groß ist η. Wenn sich f nicht sehr ändert, gilt zumindest für bel. $\xi \in (a,b)$

$$F(b) = F(a) + F(\xi)(b-a)$$

<u>Verfeinerung:</u> Teilpunkte $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ sind eine beliebige Zerlegung Z des Intervalls $I := [a.b]$. Diese Zerlegung berechnen wir mit $\{x_0,...,x_n\}, I_k := [x_{k-1}, x_n]$ soll $k-$te Teilintervall von Z mit Länge $|I_k| := x_k - x_{k-1}$ sein, und $|Z| = \max\limits_{x=1}^{n} |t_k|$ das Feinheitsmaß.



Man beachte

$$F(b) = F(a) = F(x_n) \underbrace{- F(x_{n-1}) + F(x_{n-1})}_{=0} - F(x_{k-2}) + ... \underbrace{- F(x_1) + F(x_1)}_{=0} - F(x_0)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1}) \qquad \text{(Summierung der Teilstücke)}$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt nun für geeignete $\eta_k \in \mathring{I}_k$

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\eta_k)|I_k|$$

Somit

$$\otimes \quad F(b) = F(a) + \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)|I_k|$$

Betrachten wir nun eine Folge von Zerlegungen

$$Z_j = \{x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, ..., x_{n_j}^{(j)}\} \text{mit} |Z_j| \to 0$$

und zu jedem Z_i einen Zwischenvektor

$$\xi_1 := \left(\xi_1^{(j)} . \xi_2^{(j)}, ..., \xi_j^{(j)}\right) \text{mit} \, \xi_k^{(j)} \in \left(x_{k-1}^{(j)}, x_k^{(j)}\right)$$

und setzen

$$S(Z_j, \xi_j) := \sum_{k=1}^{n_j} f(\xi_k^{(j)}) \left|I_k^{(j)}\right| \qquad \text{(Riemann-Summe)}$$

Wie in $\otimes$ gibt es für jedes j einen Zwischenvektor η_j mit

$$F(b) = F(a) + \sum_{k=1}^{n_j} f(\eta_k^{(j)}) \left|F_k^{(j)}\right| = F(a) + S(Z_j, \eta_j)$$

$$= F(a) + \lim_{j \to \infty} S(Z_j, \eta_j)$$

Sei f im Folgenden stetig auf $I = [a.b]$, dann ist f glm. stetig. Es gilt $\forall x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$ stets $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_1 := \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. für jede Zerlegung Z mit $|Z| < \delta$ und zugehörigem Zwischenvektor ξ gilt dann

$$|F(b) - F(a) - S(Z,\xi)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \left(f(\eta_k) - f(\xi_k) |I_k| \right) \right| \leq \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{n} |Z_k| = \varepsilon$$

Zu einer beliebigen Riemannfolge $S(Z, \xi_j)$ und obigem δ gibt es ein j_0, so daß für $j > j_0$ stets $|Z_j| < \delta$ und dann auch $|F(b) - F(a) - S(Z_j, \xi_j)| < \varepsilon$ ausfällt, d.h. für beliebige Riemannfolgen konvergiert $S(Z_j, \xi_j)$ (gegen $F(b) - F(a)$).

Definition: Die Funktion $f:[a,b]\to R$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, wenn jede Riemannfolgen $S(Z_j,\xi_j)$ gegen einen Grenzwert konvergiert. Diesen gemeinsamen Grenzwert bezeichnet man mit dem Symbol $\int_a^b f(x)dx$ und nennt ihn das Riemannintegral von f über $[a,b]$.

Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Besitzt F auf dem Intervall $[a,b]$ eine stetige, aber auch R-integrierbare Ableitung, so ist

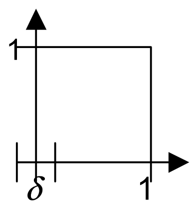
$$F(b)=F(a)+\int_a^b F'(x)dx$$

und somit $\int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a) \quad (=F\big|_a^b)$

$\Big\}$ $F(b)$ mittels Grenzwertprozess

(falls F bekannt ist, ist $\int_a^b F'(x)dx$ einfach zu berechnen)

Bsp.: Die Funktion



$$f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x\le 0\\ 1 & 0<x\le 1\end{cases}$$

Für eine beliebige Zerlegung Z von $[-1,1]$ mit $|Z|\le\delta$ gilt

$$|S/Z,\xi)-1|\le\delta \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

ist R-integrierbar.

Frage Existiert eine Stammfunktion?
Gesucht F mit $F'(x)=f(x) \quad x=[-1,1]/\{0\}$

$$F(x)=\begin{cases}\alpha & -1\le x\le 0\\ x+\beta & 0<x\le 1\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = F\big|_{-1}^{1} = (1+\beta)-\alpha = 1+(\beta-\alpha)$$

Satz: Jede auf $[a,b]$ stetige Funktion ist dort auch R-integrierbar.

Ungleichung für Riemann-Integrale

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le |b-a|\|f\|_\infty = (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

Beweis: oBdA sei $a < b.$ Für jede Riemann-Summe gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \le \|f\|_\infty \left|\sum_{k=1}^{n} |I_k|\right| = \|f\|_\infty (b-a)$$

<u>Zweiter Hauptsatz der Differential und Integralrechnung</u>

Jedes $f \in C\,[a,b]$ besitzt eine Stammfunktion auf $[a,b]$., z.B. die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (a \le x \le b)$$

Bisher haben wir zu allen Funktionen das Integral in einer geschlossenen Form darstellen können, aber nicht zu allen Funktionen muß sich die aus elementaren Funktionen darstellen lassen. In den Fällen liefert das Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

neue Funktionen.

a) Integralsinuns $\quad Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (0 \le x \le \infty)$

Man beachte $\quad \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

b) Dilogarithmus $\quad Di(x) = -\int_1^x \frac{\log t}{t-1} dt \quad (0 \le x \le \infty)$

c) Fehlerfunktion $\quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (0 \le x \le \infty)$

d) Elliptische Integrale und deren Umkehrfunktion

$$F(x,k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \qquad (0 \le x \le \infty)$$

$$E(x,k) = \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\,dt$$

Vorschläge und Ideen zur Berechnung obiger Funktionen

° Für einige Spezielle x lassen sich obige Funktionen analytisch bestimmen, z.B.

$$Di(0) = \frac{\pi^2}{6}$$

° Reihenentwicklung nach endliche vielen Termen abbrechen, z.B.

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots$$

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \ldots$$

$$\int_0^x 1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}+-\ldots\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}=t-\frac{t3}{3\cdot 3!}+\frac{t^5}{5\cdot 5!}+-\ldots\pm\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\Bigg|_0^x$$

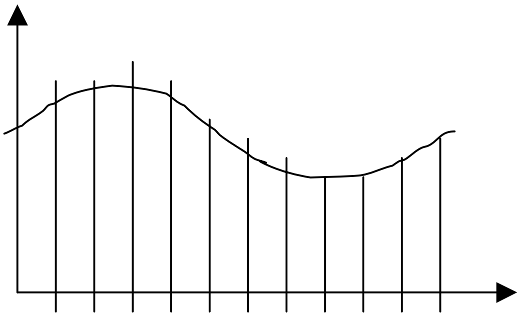
$$=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}\ldots.$$

Vorsicht! Konvergenzradius der Reihenentwicklung beachten;
Vertauschen der Beiden Grenzprozesse

$$\lim_{n\to}\sum_{i=1}^{n}\int f_i(x)dx=\int\lim_{n\to}\sum_{i=1}^{n}f_i(x)dx$$

Quadraturverfahren

z.B. summierte Mittelpunktsformel



$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)+\underbrace{\frac{b-a}{4n}\sup_{\xi\in(a,b)}f'(\xi)}_{Fehler\,0(n^{-1})}$$

Partielle Integration (Produktintegral)

Sei f stetig und g stetig diffbar auf (a,b).
Sei F eine Stammfunktion zu f auf (a,b). Dann gilt:

$$\int_a^b fg dx=Fg\Big|_a^b-\int_a^b Fg'dx$$

Bsp.: $\int_a^b\cos x dx=\sin x\Big|_a^b$

$$\int_a^b\cos^2 x dx=\int_a^b\underbrace{\cos x}_{f}\cdot\underbrace{\cos x}_{g}dx=\underbrace{\sin x}_{F}\cdot\underbrace{\cos x\Big|_a^b}_{g}+\int_a^b\underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}dx=\sin c\cos x\Big|_a^b+x\Big|_a^b-\int_a^b\cos^2 x dx$$

$$\int_a^b\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\left(\sin x\cos x\Big|_a^b+x\Big|_a^b\right)$$

$$\int_a^b \cos^n x dx = \sin x cos^{n-1} x\Big|_a^b + (n-1)\int_a^b \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \cos^{n-2} x dx$$

$$\Rightarrow n\int_a^b \cos^n x dx = \sin x \cos x\Big|_a^b + (n+1)\int_a^b \cos^{n-2} x dx$$

$$\int_a^b \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos x}{n}\Bigg|_a^b + \frac{n-1}{n}\int_a^b \cos^{n-2} x dx$$

Substitutionsregel: Es gelten

i) f stetig in (a,b) und g stetig diffb. auf (a,b)

ii) Es ist $g((a,b)) \subset (a,b)$ und $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$

Dann gilt die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$$

$$\left(x = g(t), \frac{dx}{dt} = g'(t)\right)$$

<u>Handhabung von R-Integralen</u>

Es bezeichne $R[a,b]$ die Menge der R-integrierbaren Funktionen über dem Intervall $[a,b]$.

Satz: Mit $f, g \in R[a,b]$ gilt auch $f + g \in R[a,b]$ und jedes Vielfache $cf \in R[a,b]$ $(c \in R)$.
Weiter gilt

$$\int_a^b f + gdx = \int_a^b fdx + \int_a^b gdx \quad \text{bzw.}$$

$$\int_a^b cfdx = c\int_a^b fdx \quad \text{und} \quad \int_a^b fdx = -\int_b^a fdx$$

Satz: Seien $f, g \in R[a,b]$ mit $f \geq g$. Dann gilt

$$\int_a^b fdx \geq \int_a^b gdx$$

Insbesondere gilt für $f \geq 0$: $\int_a^b fdx \geq 0$

Satz: Ein auf $[a,b]$ R-integrierbare Funktion ist dort notwendig beschränkt.

Beschäftigen wir uns nun mit der Frage, wie man einer Funktion ansehen kann, ob sie eine Stammfunktion besitzt bzw. R-integrierbar ist.
Wir liefern im Folgenden hinreichend Integrabilitätskriterien.

Satz: Jede auf $[a,b]$ stetige Funktion ist dort auch R-integrierbar, d.h. $C[a.b] \subset R[a,b]$.

Darbouxsche Integrale

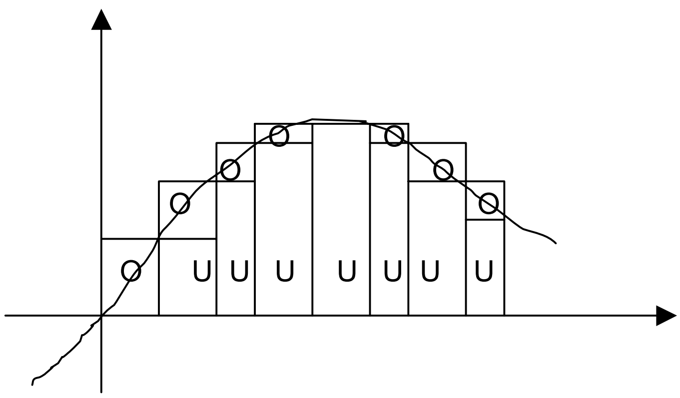
f sei beschränkt auf $[a,b]$, Z irgend eine Zerlegung von $[a,b]$ mit den Teilintervallen $I_k = [x_{k-1}, x_k]$.
Mit

$$m_k := \inf_{x \in I_k} f(x) \qquad M_k := \sup_{x \in I_k} f(x)$$

bilde man die Unter- und Obersumme

$$U(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} m_k |I_k| \ , \ O(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} M_k |I_k|$$

Offenbar gilt stets $U(f,Z) \le O(f,Z)$



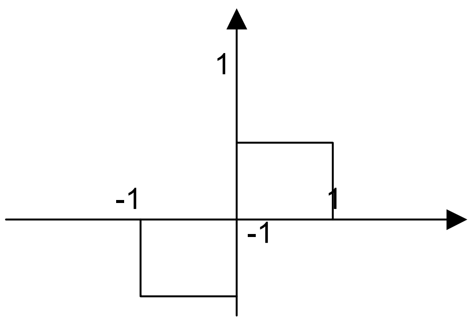
O $\hat{=} O(f,Z)$
U $\hat{=} U(f,Z)$

$B[a,b]$ sei die Menge der Funktionen mit beschränkter Variation
z.B. $x^{\alpha} \notin B[a,b]$ für $\alpha < 0$
Satz: $f \in B[a,b]$ ist genau dann Darboux-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon < 0$ eine Zerlegung Z mit

$$O(Z) - U(Z) < \varepsilon$$

gibt

z.B.



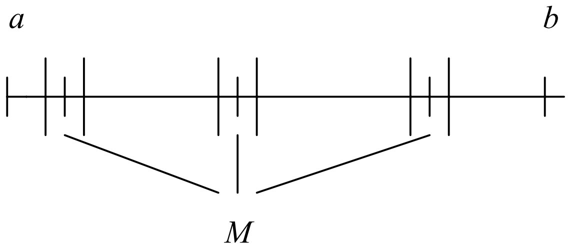
Offensichtlich gilt $f \in B[-1,1]$ und für jede Zerlegung bei der O das Ende eines Teilintervalls ist, gilt $O(Z) - U(Z) = 0 < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$

Satz: Genau die Funktionen aus $R[a.b]$ sind Darboux-integrierbar.

Bem.: D-Integrierbarekeit ist eine Darstellung der R-Integrierbarkeit.

Satz: Jede auf $[a,b]$ monotone Funktion ist auf $[a,b]$ R-integrierbar.

Def.: Eine Menge $M \subset R$ heißt Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon < 0$ höchstens abzählbar viele abgeschlossene Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ gibt, die M überdecken und deren Längensumme $\sum |I_k| \le \varepsilon$ gilt.



Betrachte zu jedem $\xi \in M$ das Teilintervall $\xi \in \left[\xi - \frac{\varepsilon}{24}, \xi + \frac{\varepsilon}{24}\right]$ (n Anzahl der Elemente in M). Dann gilt $|I_k| = \frac{\varepsilon}{n}$ und somit $\sum |I_k| \le \varepsilon$.

<u>Lebesguesche Integrabilitätskriterium</u>

Die Funktion f ist genau dann auf $[a,b]$ R-integrierbar, wenn sie dort beschränkt und <u>fast</u> überall stetig ist, d.h. die Menge der Unstetigkeitsstellen ist eine Nullmenge.

Satz: $\int_a^b f dx$ existiert immer dann, wenn f auf $[a,b]$ beschrankt und dort an höchstens abzählbar vielen Stellen unstetig ist.

Satz: Unterscheidet sich f und $g \in R[a,b]$ nur an endlich vielen Stellen des Intervalls $[a,b]$, so gehört auch f zu $R[a,b]$ und es gilt $\int_a^b f dx = \int_a^b g dx$

Bem.: Beim Integrieren kommt es nicht auf endlich viele Funktionswerte nicht an!

Satz: Die Funktion $f \in R[a,b]$ ist auf jedem Teilintervall von $[a,b]$ integrierbar. Sind $a_1 a_2, a_3$ irgendwelche Punkte in $[a,b]$, so gilt die Gleichung

$$\int_{a_1}^{b} f dx = \int_{a_1}^{a_3} f dx + \int_{a_3}^{a_2} f dx$$

Bem.: Setze $a_3 = a_1 \Rightarrow \int_{a_1}^{a_2} f dx = \int_{a_1}^{a_1} f dx + \int_{a_1}^{a_2} f dx \Rightarrow \int_{a_1}^{a_1} f dx = 0$

Satz: Mit $f, g \in [a,b]$ liegen auch die folgenden Funktionen in $R[a,b]$:
$|f|, f^+ \left(f^+(x) = \max(0, f(0))\right), f^-, \max(f \cdot g), \min(f \cdot g). f \cdot g$

Gilt $|g(x)| \ge \alpha > 0$ auf $[a,b]$. Dann gehört auch $f/g \in R[a,b]$

Wieso genügt nicht $|g(x)| > 0$, z.B. $g(x) = \begin{cases} x & , x \ne 0 \\ 17 & , x = 0 \end{cases}$ $\quad 1 \in R[0,1], g \in R[0,1]$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist f $[a,b]$ R-integrierbar, so gibt es eine wohlbestimmte Zahl $\inf f \le \mu \le \sup f$ mit

$\int_a^b f dx = \mu(b-a)$.

Für stetiges f ist $\mu = f(\xi)$ mit $\xi \in (s,b)$.

Integrale der Form

$$\underline{\int_0^\infty e^{-x} dx} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty} - e^{-t} + e^{-0} = \lim_{t\to\infty} - e^{-t} + 1 = 1$$

uneigentliches Integral

Integrale über unbeschränkte Intervalle

Ist die Funktion f für jedes $f > a$ auf $[a,t]$ R-integrierbar und strebt $\int_a^t f dx \to I$ für $t \to \infty$ so

Sagt man, das uneigentliches Integral $\int_a^{+\infty} f dx$ konvergiert oder existiert und habe den

Wert I , kurz es sei $\int_a^\infty f dx := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f dx$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral wird als divergent bezeichnet.

Bsp. a) $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, da $\int_0^t e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^t = 1 - e^{-t} \to 1$

b) $$\int_1^t x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} & ,\alpha \neq 1 \\ \ln t & ,\alpha = 1 \end{cases}$$

für $t \to \infty$ folgt

$\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ gilt.

Cauchy´sches Konvergenzkriterium

Das Integral $\int_0^\infty f dx$ konvergiert genau dann, wenn folgende Cauchybedingung erfüllt

ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Stelle so, daß für $t > s > s_0$ stets $\left|\int_s^t f dx\right| < \varepsilon$ erfüllt ist.

Bsp.: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \left(= \underset{Integral\,\sin us}{Si(\infty)} \right)$ ist konvergent. $0 < s < t$ gilt

$\int_s^t \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_s^t - \int_s^t (-\cos x)(\frac{1}{x^2}) dx$ und somit

$\left| \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx \right| \le \frac{1}{t} + \frac{1}{s} + \int_s^t \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{t} + \frac{1}{s} - \frac{1}{t} + \frac{1}{s} = \frac{2}{s}$

mit $\left| \int f dx \right| \le \int |f| dx$

Dies bleibt für alle $s > s_0 := \frac{2}{\varepsilon}$ gewiß kleiner als ε.

Es gilt ferner

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

<u>verschiedene Konvergenzkriterien</u>

Satz: Es sei $f \ge 0$.

$$\int_a^\infty f dx \Leftrightarrow \exists k > 0 \forall t > a : \int_a^t f dx < k$$

Satz: Ein absolut konvergentes Integral $\int_0^\infty f dx$ ist erst recht konvergent und es gilt:

$$\left| \int_a^\infty f dx \right| \le \int_a^\infty |f| dx$$

Majorantenkriterium: Ist $|f| < g$ auf $[0.\infty]$ und konvergiert $\int_a^\infty g dx$, so ist $\int_a^\infty f dx$ konvergent.

Minorantenkriterium: Ist $0 \le h \le f$ auf $[0.\infty]$ und divergiert $\int_a^\infty h dx$, so muß auch $\int_a^\infty f dx$ divergieren.

Grenzwertkriterium: Sind f und g positiv auf $[1, \infty)$ und strebt $\frac{f(x)}{g(x)}$ für $x \mapsto \infty$ gegen einen positiven Wert, so haben die Integrale $\int_a^\infty f dx$ und $\int_a^\infty g dx$ das selbe Konvergenzverhalten.

Strebt $\frac{1}{g} \to 0$ so kann man aus der Konvergenz von $\int_a^\infty g dx$ auf die des Integrals schließen.

Integrale von unbeschränkten Funktionen

Ist f in $[1,\infty)$ unbeschränkt, strebt aber

$$\int_a^t f dx \to I \text{ für } t \to b^-$$

so sagt man das uneigentliche Integral konvergiert bzw. existiert und habe den Wert I. Kurz

$$\int_a^b f dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f dx$$

Bsp.: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ da $\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin t \to \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ existiert nicht, da z.B. das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x}$

Cauchy-Hauptwert

Betrachtet man beispielsweise das Integral

$$\int_a^b \frac{1}{x-c} \quad (a < c < b))$$

so mag man sich eine Verallgemeinerung des Integralbegriffs wünschen, da zwar nicht $\lim_{\in\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} \frac{1}{x-c} dx + \lim_{\in\to 0} \int_{c+\in}^b \frac{1}{x-c} dx$ existiert, jedoch $\lim_{\in\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{1}{x-c} dx - \int_{\varepsilon+c}^b \frac{1}{x-c} dx \right)$.

Dies bezeichnet man als Cauchy-Hauptwert oder part finite. Allgemein bezeichnet für eine Funktion f mit einer Unstetigkeitsstelle $c \in (a,b)$

$$\text{p.f.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

den Cauchy-Hauptwert.

Bsp.: $(a < c < b)$

$$\text{p.f.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left([\ln|x-c|]_a^{c-\varepsilon} + \ln|b-c| - \ln|\varepsilon| \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|-\varepsilon| - \ln|a-c| + \ln|b-c| - \ln|\varepsilon| \right) = \ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = \ln\frac{b-c}{c-a}$$

Bem.: Für den Hauptwert eines Integrals über ein beschränktes oder unbeschränktes Gebiet gilt folgendes:
Existiert das uneigentliche Integral, so existiert auch sein Hauptwert und beide sind gleich. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Einschub: Ein zum Cauchy´schen Hauptwert äquivalentes gibt es auch bei Integralen über unbeschränkte Intervalle. Hier berechnet man

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx,$$

falls er existiert, als Hauptwert des Integrals und bezeichnet ihn mit

$$\text{p.f.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Bsp. zu Bem.: unbeschränktes Intervall

Da für den Integranden $f(-x) = -f(x)$ gilt, ist $\int_{-\delta}^{\delta}\frac{x}{1+x^2}dx = 0$

und daher $\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1+x}{1+x^2}dx = \int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{1+x^2}dx + \int_{-\delta}^{\delta}\frac{x}{1+x^2}dx = \int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{1+x^2}dx$

Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\delta\to\infty}\left(\int_{0}^{\delta}\frac{1}{1+x^2}dx + \int_{-\delta}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx\right)$

$$= 2\cdot\lim_{\delta\to\infty}\int_{0}^{\delta}\frac{1}{1+x^2}dx = 2\cdot\lim_{\delta\to\infty}\arctan\delta = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

Also ist p.f. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx = \lim_{\delta\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1+x}{1+x^2}dx$

$$\lim_{\delta\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

Konvergenz-Test

Da die Aussagen über die Konvergenz bzw. Divergenz eines Integrals bei der Funktion x^α recht eindeutig sind, wird sie gerne als Testfunktion verwendet.

Vergleichskriterium

Seien f stetig auf $[a,\infty)$, g auf $[a,b]$ und $a,b \in R$

Dann gilt $|f(x)| \le kx^\alpha, a \le x \le \infty, a < -1 \Rightarrow \int_{a}^{\infty} f(x)dx$ konvergiert

$|g(x)| \le kx^\alpha . o < x \le b, -1 < \alpha < 0 \Rightarrow \int_{0}^{b} g(x)dx$ konvergiert

Bsp.: $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ Da $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ist der Integrand bei $x = 0$ durch 1 zu ersetzen.

Da $\int_0^c f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^c f(x)dx$ gilt, braucht nur das zweite Integral untersucht werden.

Partielle Integration: $$\int_0^c \frac{\sin x}{x}dx = \underbrace{-\frac{1}{x}\cos x\Big|_1^c}_{\xrightarrow{c\to\infty} 0} + \int_0^c \cos x\left(\frac{1}{-x^2}\right)dx$$

Für $\int_1^c \frac{\cos x}{x^2}dx$ liefert das Vergleichskriterium

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{|\cos x|}{|x^2|} \le \frac{1}{|x^2|} \le x^{-2} \quad ,x \ge 1$$

Also konvergiert $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$, was wir schon mittels Cauchy´schen Konvergenzkriterium gezeigt haben.

Motivation und Definition des Riemann-Stieltjessche-Integrals

Das Riemann-Stieltjessche-Integral ist eine Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals. Betrachten wir die folgenden Motivation.
Die Punkte $x_1,...,x_n$ der x-Achse seien mit den Massen $m_1,...,m_n$ belegt. Dann nennt man

$$x_s = \frac{m_1x_1 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

den Schwerpunkt des Massensystems.

Formulieren wir nun den Schwerpunkt nun in einer anderen Weise. Dazu definieren wir eine Belegungsfunktion $m(x)$ auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ so:
$m(a)$ sei 0 und $m(b)$ bedeute die im Intervall $[a,b]$ vorhandene Masse. Für die diskrete Belegung der x-Achse mit Masse $m(x) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i$ mit $x \in [x_{k-1}, x_k]$ und $m(b) = \sum_{i=1}^{n} m_i$
Es bezeichne $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$ einen Zwischenvektor zu der Zerlegung Z , d.h.
$\xi_j \in (x_{j-1}, x_j) \quad j = 1,...n$
Aufgrund der obigen Betrachtung liefert

$$\tilde{x} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \left(m(x_k) - m(x_{k-1})\right)$$

Läßt man das System Σ um die y-Achse rotieren, so wird man bei dem Versuch das Trägheitsmoment von Σ zu bestimmen auf Zerlegungssummen der Form

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{\,2} \left(m(x_k) - m(x_{k-1})\right)$$

und deren Grenzwert geführt

Diese Beispiel gibt Anlaß zu den folgenden Definitionen

Definition: Es sei $f, \alpha : [a,b] \Rightarrow R$
Ist $Z = \{x_0, ..., x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ ein zugehöriger Zwischenvektor, so heißt

$$S_\alpha(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\big)$$

eine Riemann-Stieltjessche-Summe.
Ist (Z_j) eine Zerlegungsfolge, so bezeichnet man die Folge der Summe $S_\alpha(f, Z, \xi)$ als die RS-Folge.

Strebt eine RS-Folge gegen einen und damit gegen ein und den selben Grenzwert, so sagt man, f sei auf $[a,b]$ bzgl. α RS-integrierbar. Den gemeinsamen Grenzwert aller RS-Folgen bezeichnet man mit

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x), \int_a^b fd\alpha(x), \int_a^b fd\alpha$$

und nennt ihn das RS-Integral von f über $[a,b]$ bzgl. Des Integrator α

Satz: Mit f und g liegt auch die Summe $f+g$ und jedes Vielfache cf in $R[a,b]$.
Ferner ist f auch bzgl. $c\alpha$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (f+g)d\alpha = \int_a^b fd\alpha + \int_a^b gd\alpha$$

$$\int_a^b cfd\alpha = c\int_a^b fd\alpha$$

$$\int_a^b fd(c\alpha) = c\int_a^b fd\alpha$$

Ist f bzgl. α und bzgl. β integrierbar, so ist f auch bzgl. $\alpha + \beta$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b fd(\alpha+\beta) = \int_a^b fd\alpha + \int_a^b fd\beta$$

Satz: Liegt f in $R_\alpha[a,b]$, so liegt umgekehrt α in $R_f[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b fd\alpha + \int_a^b \alpha df = [f\alpha]_a^b$$

Wir treffen folgende Vereinbarung

$\int_a^b fd\alpha = 0$ und $\int_b^a fd\alpha := -\int_a^b fd\alpha$

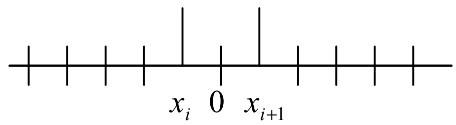
Satz: ist $f \in R_\alpha[a,b]$ und sind $a_1, a_2, a_3 \in [a,b]$ so gilt

$$\int_{a_1}^{a_2} fd\alpha = \int_{a_1}^{a_3} fd\alpha + \int_{a_3}^{a_2} fd\alpha$$

Bem.: Wenn f bzgl. α auf $[a,b]$ und auf $[b,c]$ RS-integrierbar ist, braucht $\int_a^c f d\alpha$ nicht zu existieren!

Bsp.: $f(x) := \begin{cases} 0 & für\ -1 \le x \le 0 \\ 1 & für\ 0 < x \le 1 \end{cases}$

$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & für\ -1 \le x \le 0 \\ 1 & für\ 0 < x \le 1 \end{cases}$



$x_i < 0 \le x_{i+1}$

$$S\alpha(f,Z,\xi) = f(\xi^*)(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)) = f(\xi^*) \quad ,\xi^* \in (x_i, x_{i+1})$$
$$\xi^* > 0,\ |x_{i+1} - x_i| \to 0,\ \ S\alpha \to 1$$
$$\xi^* > 0,\ |x_{i+1} - x_i| \to 0,\ \ S\alpha \to 0$$

Definition: Die Funktion g heißt von beschränkter Variation auf $[a,b]$, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, so daß für jede Zerlegung $Z = \{x_0,...,x_n\}$ stets

$$V(g,Z) := \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \le M$$

bleibt. In diesem Fall wird die reelle Zahl $V_a^b(g) := \sup V(g,t)$ die totale Variation von g genannt.

Die Menge aller Funktion auf $[a,b]$ mit beschränkter Variation bezeichnet man kurz mit $B/[a,b]$.

<u>Fundamentalsatz für RS-Integrale</u>

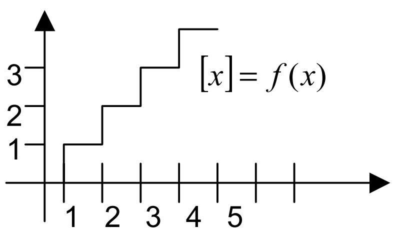
Ist die Funktion $f \in B[a,b]$ bzgl. $\alpha \in B/[a,b]$ auf $[a,b]$ RS-integrierbar, so gilt

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \le \|f\|_\infty \cdot V_a{}^b(\alpha)$$

<u>Satz:</u> Sind die Funktion f und die Ableitung α' von α R-integrierbar auf $[a,b]$, so ist $\int_a^b f d\alpha$ vorhanden und $= \int_a^b f\alpha' dx$

<u>Satz:</u> Sei α Treppenfunktion auf $[a,b]$, die genau an den Stellen $c_1,...,c_n$ Sprünge der Größe $\alpha_1,...,\alpha_n$ bezeichnen. Dann ist für jedes $f \in C[a,b]$ stets

$$\int_a^b f d\alpha \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\alpha_k$$



Bsp.: $\int_0^t e^x d\sin x = \int_0^t e^x \cos x dx = e^x \cos x\Big|_0^t + \int_0^t e^x \sin x dx$

$$= e^t \cos t - 1 + \left(e^x \sin x\Big|_0^t - \int_0^t e^x \cos x dx \right)$$

$$= e^t \cos t - 1 + \left(e^t \sin t - 0\right) - \int_0^t e^x \cos x dx$$

$$\int_0^t e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^t (\cos t) + \sin t - 1\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^t e^x d\sin x = \frac{1}{2}\left(e^t (\cos t) + \sin t - 1\right)$$