

→ TAYLOR ein-dimensionalfür $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zugehöriges Taylorpolynom vom Grad k im Entwicklungspunkt x_0

$$T_{f, x_0}^k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

$$\text{gilt: } f(x) = T_{f, x_0}^k(x) + \underbrace{R_{k+1}(x_0, x)}$$

Restglied = einziger Unterschied

z.B. Lagrange-Form d. Restglieds:

 $\exists \xi$ zwischen x_0 und x , so daß

$$R_{k+1}(x_0, x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot (x - x_0)^{k+1}$$

→ TAYLOR mehrdimensionalfür $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{gilt: } f(x+v) = f(x) + d_v f(x) + \frac{1}{2} d_v^2 f(x) + \dots + \frac{1}{k!} d_v^k f(x) + R_{k+1}(x, v)$$

$$[d_v := \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}]$$

gilt: $\exists \xi$ zwischen 0 und 1, so daß

$$R_{k+1}(x, v) = \frac{1}{(k+1)!} d_v^{k+1} f(x + \xi v)$$

Anwendung mit $x = x_0$, $v = x - x_0$

$$\text{speziell: } d_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

$$d_v^2 f(x) = \langle v, H_f(x) v \rangle$$

FORMEL
$$T_{f, x_0}^2 = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} (x - x_0)^T \cdot H_f(x_0) (x - x_0)$$

Aufgabe 1

Bestimme Taylorpolynom 4. Grades von $f(x) = \sin^2 x$ im Entwicklungspunkt 0. Man berechne damit eine Näherung an $\sin^2 0,1$ und zeige, daß der Fehler dabei $< 10^{-6}$!

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x \stackrel{\text{Browst.}}{=} \sin(2x)$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2 \cos(2x)$$

$$\Rightarrow f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = -4 \sin(2x)$$

$$\Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = -8 \cos(2x)$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(0) = -8$$

$$f^{(5)}(x) = 16 \sin(2x) \leftarrow \text{nicht benötigt}$$

$$T_{f,0}^4(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0) \cdot x^4$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} x^4$$

$$\Rightarrow \sin^2(0,1) \approx 0,1^2 - \frac{1}{3} \cdot 0,1^4 = \frac{1}{100} - \frac{1}{30000} = \frac{299}{30000} \approx 0,009966$$

Abschätzung d. Fehlers

$$|R_f(0,0,1)| = \frac{1}{5!} |f^{(5)}(\xi)| |0,1|^5 \leq \frac{10^{-5}}{120} \left| \max_{\xi \in (0,0,1)} (16 \sin 2\xi) \right|$$

$$= \frac{10^{-5}}{120} \cdot 16 \sin(0,2) = \frac{16}{12 \cdot 5} \cdot 10^{-6} < 10^{-6}$$

Aufgabe 2: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y,z) = e^{2x+yz}$

Wie sieht das Taylorpolynom 2. Grades aus, das f in der Nähe von $(0,0,0)$ approximiert?

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2e^{2x+yz} \\ ye^{2x+yz} \\ xe^{2x+yz} \end{pmatrix}$$

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2x+yz} & 2ye^{2x+yz} \\ 2ze^{2x+yz} & z^2 e^{2x+yz} & (1+yz)e^{2x+yz} \\ 2ye^{2x+yz} & (1+yz)e^{2x+yz} & y^2 e^{2x+yz} \end{pmatrix} \quad -2-$$

$$T_{f, (0,0,0)}(x, y, z) = f(0) + \nabla f(0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x, y, z) H_f(0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= 1 + (2, 0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x, y, z) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{1 + 2x + 2x^2 + yz}} \quad \begin{pmatrix} 4x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

→ Integrieren

PRINZIP: Rückführung auf elementare Integrale

Tools:

- LINEARITÄT $\int [\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)] dx =$

$$= \lambda \cdot \int f(x) dx + \mu \cdot \int g(x) dx$$

- PRODUKTE in Summen zerlegen

- Partialbruchzerlegung (PBZ)
- Additionstheoreme

- partielle Integration:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = F(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x) dx$$

- typisch: $f(x) = e^x$
- mehrfache Anwendung
- $\int g = \int 1 \cdot g$ (1 als $f(x)$)

- "KETTEN REGEL"

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + C =$$

$$= F(g(x)) + C$$

Substitution

— Substitution !!

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

$$\begin{array}{l} \text{Subst:} \\ x = g(t) \\ \frac{dx}{dt} = g'(t) \end{array}$$

$$= H(t) + C =$$

$$= H(g^{-1}(x)) + C$$

↑
Rücksubstitution

Resubstitution kann man sparen bzw.:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

• mit Subst: $f = g^{-1}(x)$

• typisch: $e^x, \ln(x), \sqrt{\dots}$ wegschreiben

Aufgabe 3

Man bestimme

$$\int \frac{1 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

Subst: $t = e^x \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

↓
 $\frac{dt}{dx} = e^x = t$

↳ $\int \frac{1-2t}{(t+1)^2} \cdot \frac{1}{t} dt \rightarrow \text{PBZ}$

$$\frac{1-2t}{(t+1)^2 \cdot t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} = \frac{A(t+1)^2 + B(t+1) \cdot t + C \cdot t}{t(t+1)^2}$$

$$A(t+1)^2 + B \cdot t(t+1) + C \cdot t = 1 - 2t$$

$$At^2 + 2At + A + Bt^2 + Bt + C = 1 - 2t$$

$$t^2(A+B) + t(2A+B+C) + A = -2t + 1$$

I) $A+B=0$

→ $B = -1$

II) $2A+B+C = -2$

⇒ $C = -3$

$$\int \frac{1-2e^x}{(e^x+1)^2} dx = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt - 3 \int \frac{1}{(t+1)^2} dt =$$

$$= \ln|t| - \ln|t+1| + 3 \frac{1}{t+1} + C$$

Resultat: $\stackrel{!}{=} x - \ln(e^x+1) + \frac{3}{e^x+1} + C$

Aufgabe 4 Man berechne

$$\int_{-\pi/2}^0 e^{\cos x} (\sin^2 x - 1) \sin x dx =$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) - 1 = -\cos^2(x)$$

$$= - \int_{-\pi/2}^0 e^{\cos x} (\cos^2(x)) (\sin x) dx = \int_0^1 e^t \cdot t^2 dt$$

Subst: $\cos x = t$

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x$$

Grenzen:

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow t = \cos(0) = 1$$

Brusten

$$= e^t (t^2 - 2t + 2) \Big|_0^1 = e(1-2+2) - 1(0-0+2) = \underline{e-2}$$

oder

partielle I.

$$= \int e^t \cdot t^2 dt = e^t \cdot t^2 - 2 \int e^t \cdot t dt = \text{partielle I.}$$

$$= e^t \cdot t^2 - 2(e^t \cdot t - \int e^t \cdot 1 dt) = e^t (t^2 - 2t + 2)$$

Resultat:

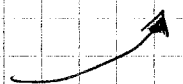
$$\underline{e^{\cos x} (\cos^2(x) - 2 \cos(x) + 2)}$$

Aufgabe 5

Berechne

$$\int_e^{e^e} \frac{\ln(\ln x)}{\ln(x^x)} dx = ?$$

$$= \int_e^{e^e} \frac{\ln(\ln x)}{x \cdot \ln x} dx = \int_1^e \frac{\ln y}{y} dy =$$



Subst: $\ln x = y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Grenzen:

$$x = e \Rightarrow y = \ln e = 1$$

$$x = e^e \Rightarrow y = \ln e^e = e$$

$$\uparrow \int_0^1 z \, dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad (\text{keine Resultat. notwendig})$$

Subst. $z = \ln y$
 $dz = \frac{1}{y}$

Grenzen: $y=1 \Rightarrow z = \ln 1 = 0$
 $y=e \Rightarrow z = \ln e = 1$

zum üben:

$$\bullet \int \frac{x + \sqrt{x}}{2x(\sqrt{x}-1)^2} dx \quad (x > 1)$$

$$\bullet \int \frac{5 \coth\left(\frac{x}{2}\right)}{2 + \coth\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

Ergebnisse

$$\ln(\sqrt{x}-1) - \frac{2}{\sqrt{x}-1} + C$$

$$4 \ln(2 + \coth \frac{x}{2}) - 2 \ln(2 + \coth^2 \frac{x}{2}) + x + C$$

und partiell angl? Testen!!