05.02.03

Mathe - REPETITORIUM II

$f(x,y)$

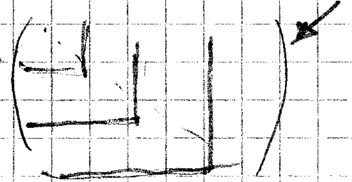
i) ohne NB: Gradient $\boxed{\nabla f \overset{!}{=} 0}$

$$H_f = \begin{cases} \text{pos. definit} \rightarrow \text{lok. Minimum} \\ \text{neg. definit} \rightarrow \text{lok. Maximum} \\ \text{indefinit} \rightarrow \text{Sattelpunkt} \end{cases}$$

eigentl. Definition von "positiv definit": $v^T \cdot A v > 0 \quad (v \neq 0)$

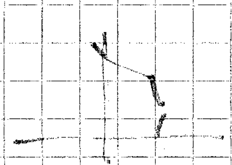
praktisch: alle EW positiv

alle Hauptabschnittsdeterminanten positiv



ii) mit Nebenbedingung in Form von $\mathbf{h}(x,y) = 0$

Langrange'sche Multiplikatorenregel:



$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla h$$

bei Unidem → Teilstücke betrachten

→ Ecken nie vergessen!!

$\boxed{A25}$ $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

ges: Maximum und Minimum auf dem Einheitskreis

(anschaulich Temperatur auf Kochplatte)

i) Aufteilen in Kreisinneres + Kreislinie

Kreisinneres: $\nabla f(x,y) = (2 \cdot x - y \,,\, 2y - x) \overset{!}{=} (0,0)$

I) $2x - y = 0$

II) $2y - x = 0$

$\boxed{f(0,0) = 0}$ Extremum im Innern

$\Rightarrow x = y = 0$

Kreisrand: $x^2+y^2=1 \Rightarrow h(x,y) = x^2+y^2-1$ (NB)

$\nabla h(x,y) = (2x, 2y)$

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla h \iff \begin{cases} 2x - y = \lambda \cdot 2x & (\mathrm{I}) \\ 2y - x = \lambda \cdot 2y & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

I nach λ) $1 - \frac{y}{2x} = \lambda$ für $x \neq 0$

$\boxed{(x=0 \rightarrow y=0, \text{ liegt nicht auf Kreisrand, Widerspruch zur NB} \Rightarrow x \neq 0)}$

λ in II) $2y - x = 2y - \frac{2y^2}{2x}$

$\cancel{4}xy - 2x^2 = \cancel{4}xy - 2y^2$

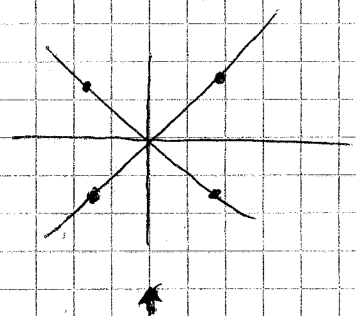
NB) $x^2+y^2 = 1$

$-2x^2+2y^2 = 0$

$x^2+y^2 = 1$

$-x^2+y^2 = 0$

$2y^2 = 1 \Rightarrow$ $\boxed{y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$



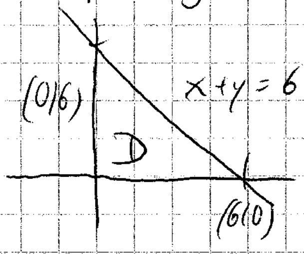
$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Insgesamt: $\min\limits_K f(x,y) = 0$, $\max\limits_K f(x,y) = \frac{3}{2}$

→ SELBST RECHNEN: KLAUSURAUFGABE HERBST

$\boxed{A29}$ $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$



gesucht: Max und Min auf D

(i) INNERES $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - 4$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 8 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = -4 \ ↯ \ (\notin D)$$

(ii) NB: $h(x,y) = x + y - 6 \overset{!}{=} 0$

$$\nabla h = (1,1)$$

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla h \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 4 = \lambda & (I) \\ 2x + 8 = \lambda & (II) \end{cases}$$

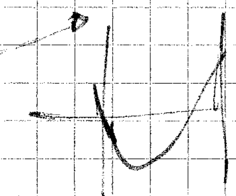
$$2y - 12 = 0 \Rightarrow y = 6, \underset{\text{(mit NB)}}{\rightarrow} x = 0 \text{ (ECKPUNKT)}$$

⚠ ECKPUNKTE EXTRA BETRACHTEN, sind bei Ableitungen dabei

$$\boxed{f(0,6) = 48 = (8 \cdot 6)}$$

iii) x-Achse: $f(x,0) = x^2 - 4x = x(x-4) \Rightarrow$ Parabel mit Scheitel bei 2

Abl: $2x - 4 = 0$
$x = 2$



$f(2,0) = 4 - 8 = -4$

$f(0,0) = 0$

$f(6,0) = 36 - 24 = 12$ (Ränder!)

ECKEN NICHT VERGESSEN!

iv) y-Achse: $f(0,y) = 8y$

Extrema nur in Ecken, die haben wir schon!!

→ keine weiteren Extrema

→ <u>INSGESAMT</u>: $\min_D f(x,y) = -4$

$\max f(x,y) = 48$

→ SELBST RECHNEN: • 1 bei Klausur

• HESSE MATRIX anschauen

STOCHASTIK

• ~~[illegible]~~ kombinatorische Grundformeln:

Auf wieviele Arten kann man n Murmeln auf N Schubladen verteilen? (Murmel-Modell)

	mit Mehrfachbesetzung	ohne Mehrfachbesetzung
unterscheidbare Murmeln	N^n	$N(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)=\frac{N!}{(N-n)!}$
nicht unterscheidbare Murmeln	$\binom{n+N-1}{N}$ *) (im Allg. nicht gleich wahrscheinlich)	$\binom{N}{n}=\frac{N!}{n!\,(N-n)!}$

Bsp: zu *) (A26.6) $n=2 \quad N=4$

$$\binom{2+4-1}{2}=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\,3!}=\frac{5\cdot 4}{2!}=\underline{\underline{10}}$$

ODER $\quad 4+\binom{4}{2}=4+\frac{4!}{2!\,2!}=4+6=\underline{\underline{10}}$

Murmeln in 1 Schublade → 4 Möglichkeiten

jede Murmel in extra Schublade

$$P(A)=\frac{\# A}{\# \Omega}=\frac{\text{Anzahl Event A}}{\text{Gesamt Anzahl Events}}$$

61a) $n \times$ Würfeln $\quad$ A: „Augenzahl verschieden" $\quad n\in[1,6]$

$$P(A)=\frac{\frac{6!}{(6-n)!}}{6^n}$$

64a) Schulklasse mit n Kindern, A: „~~[illegible]~~ mind. 2 Schüler haben am selben Tag Geburtstag"

• Entweder für 2, für 3, …, für n Schüler berechnen oder

[illegible]

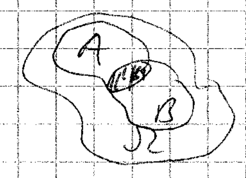
$\bar{A}$: „Alle Schüler haben an versch. Tagen Geburtstag"

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$



$$\frac{\#(A\cap B)}{\#B}$$

(63a) 4 x Würfeln

A: „mehr als eine 6"

B: „mindestens eine 6"

da A in B enthalten

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1 - \underbrace{(5/6)^4}_{\text{keine 6}} - \underbrace{\left(\frac{4\cdot 5^3}{6^4}\right)}_{\text{genau 1 mal}}}{1 - \underbrace{(5/6)^4}_{\text{keine 6}}} = \ldots$$

(66a) 3x würfeln

A: „mind. eine 3" $\quad \bar{A}$: „keine 3"

B: „mind. eine 6" $\quad \bar{B}$: „keine 6"

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (5/6)^3 = \frac{91}{216}$$

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) =$$

$$= 1 - P(A) + 1 - P(\bar{B}) - (1 - \underbrace{P(\overline{A\cup B})}_{P(\bar{A}\cap\bar{B})}) = 1 - (5/6)^3 - (5/6)^3 + (4/6)^3 = \frac{30}{216}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{30}{216}}{\frac{91}{216}} = 30/91$$