

A1) Bestimmen Sie die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen

- a) $(z+1)^4 = 1$,
- b) $(z^2+1)^2 = -1$,
- c) $\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Im} z)^2$.

(8 Punkte)

A2) Betrachten Sie das parameterabhängige lineare Gleichungssystem für $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$

$$A_\alpha \vec{x} = \vec{b}_\alpha \text{ mit } A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha - 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es
 - (i) wenigstens eine Lösung,
 - (ii) genau eine Lösung,
 - (iii) keine Lösung.
 Geben Sie im Falle der Existenz die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von α an.
- b) Bestimmen Sie für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ jeweils den Kern (Nullraum), das Bild sowie den Rang der Matrix A_α .

(12 Punkte)

A3) Gegeben seien die komplexen 2×2 -Matrizen

$$(i) A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (ii) A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (iii) A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie jeweils alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren. Bestimmen Sie jeweils die Skalarprodukte $\vec{v}_1^T \vec{v}_2$ zweier linear unabhängiger Eigenvektoren derselben Matrix A .
- b) Für welche der Matrizen definiert

$$(\vec{x}, \vec{y})_A := \vec{x}^T (A \vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^2$$

ein (komplexes) Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$?

(14 Punkte)

6004

A4) Berechnen Sie die Grenzwerte

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^n$,
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x^3)}{1 - \cos(x^2)}$,
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(e^x + \sin(x))}$,
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\ln x) - \ln x}{\ln^3 x}$.

Hinweis: Benutzen Sie bei Teilaufgabe d) eine geeignete Substitution der Variablen.

(8 Punkte)

A5) Betrachten Sie die Parameterdarstellung

$$C_1 : \vec{x}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

einer Schraubenkurve C_1 im $\mathbb{R}^3$, wobei der Parameter t die Zeit bezeichnet.

- a) Bestimmen Sie den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor.
- b) Zeigen Sie: Für eine zweimal differenzierbare Kurve $C_2 : \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ im $\mathbb{R}^3$ mit $\dot{\vec{x}}(t) \neq 0$ stehen der Tangenteneinheitsvektor $\vec{\tau}(t)$ und dessen Ableitung $\dot{\vec{\tau}}(t)$ immer senkrecht. Zeigen Sie dann, daß im Fall der Schraubenlinie C_1 auch der Geschwindigkeits- und der Beschleunigungsvektor senkrecht stehen. Gilt dies auch für die allgemeine Kurve C_2 ?
Hinweis: Differenzieren Sie $\|\vec{\tau}(t)\|^2$.
- c) Die von $\vec{\tau}(t)$ und $\dot{\vec{\tau}}(t)$ aufgespannte Ebene $E(t)$ heißt *Schmiegeebene* der Kurve im Punkt $\vec{x}(t)$. Bestimmen Sie für die Schraubenlinie die Matrix $M(t)$ der Orthogonalprojektion auf $E(t)$.
- d) Bestimmen Sie für die Schraubenlinie den Beschleunigungsanteil, der senkrecht auf $E(t)$ steht, also aus der Schmiegeebene herausbeschleunigt.

(14 Punkte)

A6)

- a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_{f,4}$ der Funktion

$$f(x) = 1 + x + \int_0^x e^{t^2} dt$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zu Termen der Ordnung 4.

- b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe a) das Taylorpolynom $T_{g,6}$ der Funktion

$$g(x) = 1 + x + \int_0^{x^2} e^{t^2} dt,$$

ebenfalls um den Punkt $x_0 = 0$ bis zu Termen der Ordnung 6.

- c) Leiten Sie für das Taylorpolynom aus b) eine Fehlerabschätzung der Form

$$|g(x) - T_{g,6}(x)| \leq C|x|^{10} \text{ für } |x| < 1$$

her. Geben Sie dazu eine zulässige Konstante C an.

(11 Punkte)

- A7) Die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad 2x_{n+2} = x_{n+1}x_n + 1 \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

- a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq x_n \leq 1$.
- b) Die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend.
Hinweis: Schätzen Sie $x_{n+2} - x_{n+1}$ nach unten ab, indem Sie die Rekursionsformel sowohl für x_{n+2} als auch für x_{n+1} verwenden.
- c) Die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- d) Berechnen Sie den Grenzwert $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

(9 Punkte)

A8)

- a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für welche α ist f stetig? Für welche α ist f in 0 rechtsseitig differenzierbar? Für welche α ist die Ableitung auf dem Intervall $[0, +\infty)$ stetig?

- b) Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \frac{\sin(x)(1 - \cos(y))}{x^2 + y^2}$$

stetig fortsetzbar ist in $x_0 = (0,0)^T$.

Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung $1 - \cos(y) \leq \frac{1}{2}y^2$, die für kleine $|y|$ gilt.

(14 Punkte)

A9) Ein Beobachter befindet sich im Koordinatenursprung und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ um die z -Achse. Dabei schaut er zur Zeit $t = 0$ in Richtung der x -Achse. Welche Kurve durchläuft für diesen Beobachter ein Punkt, der im festen Koordinatensystem die Kurve $\vec{x}(t) = (t+1, 0, 0)^T$ beschreibt? Bestimmen Sie die Parameterdarstellung dieser Beobachterkurve. Mit welcher Tangentialgeschwindigkeit bewegt sich der Punkt für den Beobachter?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Beobachter die gedrehte kanonische Basis benutzt und führen Sie einen Basiswechsel zu dieser gedrehten Basis im Zeitpunkt t durch.

(10 Punkte)

Musterlösung

zur Klausur Mathematik I/II für Elektrotechniker (Prof. Dr. W. Borchers) am 18. April 2001

A1) Bestimmen Sie die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen

- a) $(z+1)^4 = 1$,
- b) $(z^2+1)^2 = -1$,
- c) $\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Im} z)^2$.

Lösung.

Zu a) Für $w := z+1$ gilt $w^4 = 1$, also $w_k = e^{ik\frac{\pi}{2}}$ für $k = 0, \dots, 3$, d.h. $w_0 = 1$, $w_1 = i$, $w_2 = -1$, $w_3 = -i$, somit $z_0 = 0$, $z_1 = i-1$, $z_2 = -i-1$, $z_3 = i-1$.

Zu b) Für $w = z^2+1$ gilt $w^2 = -1$, also $w_1 = i$ und $w_2 = -i$. Aus $z_{1/2}^2 = w_1 - 1 = i - 1 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ folgt $z_1 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{8}}$, $z_2 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{11\pi}{8}}$ und aus $z_{3/4}^2 = w_2 - 1 = -i - 1 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}}$ erhält man $z_3 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{8}}$, $z_4 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{13\pi}{8}}$.

Zu c) Mit $z = x + iy$ folgt $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \stackrel{!}{=} (\operatorname{Im} z)^2 = y^2 \Rightarrow x^2 = 2y^2 \Rightarrow z = (2 \pm i)y$ mit $y \in \mathbb{R}$.

A2) Betrachten Sie das parameterabhängige lineare Gleichungssystem für $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$

$$A_\alpha \vec{x} = \vec{b}_\alpha \text{ mit } A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha - 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es
 - (i) wenigstens eine Lösung
 - (ii) genau eine Lösung
 - (iii) keine Lösung.

Geben Sie im Falle der Existenz die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von α an.

- b) Bestimmen Sie für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ jeweils den Kern (Nullraum), das Bild sowie den Rang der Matrix A_α .

Lösung.

Zu a) Mit Gauss-Elimination folgt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha & \alpha - 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & \alpha - 10 & \alpha - 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \end{array} \right).$$

Für $\alpha \neq 0$ ist das System eindeutig lösbar und hat die Lösung $\vec{x} = (-1, -1, 1)^T$.
Für $\alpha = 0$ hat das System wenigstens eine Lösung; die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zu b) Für $\alpha \neq 0$ ist $\operatorname{Kern} A_\alpha = \{\vec{0}\}$, $\operatorname{Bild} A_\alpha = \mathbb{R}^3$ und $\operatorname{Rang} A_\alpha = 3$.

Für $\alpha = 0$ haben wir $\operatorname{Kern} A_\alpha = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\operatorname{Bild} A_\alpha = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (die

ersten beiden Spalten der Matrix) und $\text{Rang } A_0 = 2$.

A3) Gegeben seien die komplexen 2×2 -Matrizen

$$(i) A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (ii) A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (iii) A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie jeweils alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren. Bestimmen Sie jeweils die Skalarprodukte $\tilde{v}_1^T \tilde{v}_2$ zweier linear unabhängiger Eigenvektoren derselben Matrix A .

b) Für welche der Matrizen definiert

$$(\tilde{x}, \tilde{y})_A := \tilde{x}^T (A \tilde{y}), \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{C}^2$$

ein (komplexes) Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$?

Hinweis: Überprüfen Sie mit Teil a) die Skalarprodukteigenschaften.

Lösung.

Zu a) (i) Das charakteristische Polynom ist $\det(A - \lambda \text{Id}) = (1 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, also hat A die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = 1 \pm i$. Eigenvektoren sind $\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 1 + i$ und

$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ für $\lambda_2 = 1 - i$. Das Skalarprodukt dieser Vektoren ist $\langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle = 0$.

(ii) Es ist $\det(A - \lambda \text{Id}) = (1 - \lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2)$, daraus folgen die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$. Die Eigenvektoren sind $\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ für $\lambda_1 = 0$ und $\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ für $\lambda_2 = 2$. Ihr Skalarprodukt lautet $\langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle = 1 \cdot 1 + (-i) \cdot (-i) = 0$.

(iii) Wegen $\det(A - \lambda \text{Id}) = \lambda^2 - 6\lambda + 4$ sind die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = 3 \pm \sqrt{5}$. Die Eigenvektoren sind $\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i(2 + \sqrt{5}) \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 3 + \sqrt{5}$ und $\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i(2 - \sqrt{5}) \end{pmatrix}$ zu $\lambda_2 = 3 - \sqrt{5}$. Ihr Skalarprodukt lautet $\langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle = 1 + (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = 0$.

Zu b) Es handelt sich bei $(x, y)_A$ um ein Skalarprodukt, wenn

(1) $(x, y)_A$ positiv definit ist, d.h. $(x, x)_A \geq 0$, $(x, x)_A = 0 \Rightarrow x = \vec{0}$,

(2) $(x, y)_A$ linear in beiden Argumenten ist,

(3) $(x, y)_A$ symmetrisch ist, d.h. $(x, y)_A = (y, x)_A$.

1. Lösungsmethode: Bedingung (1) ist erfüllt, wenn A positiv definit ist, d.h. nur positive reelle Eigenwerte hat. Dies ist nur für A aus (iii) erfüllt. Bedingung (2) ist immer erfüllt. Bedingung (3) ist erfüllt, wenn A symmetrisch ist, d.h. $A^* = A^T = A$ gilt. Dies gilt für die Matrizen aus (ii) und (iii). Demnach ist $(x, y)_A$ nur für die Matrix aus (iii) ein Skalarprodukt.

2. Lösungsmethode:

Zu (i): Für $\tilde{x} = (1, 1)^T$ gilt $\tilde{x}^T A \tilde{x} = 2(1 - i) \notin \mathbb{R}$, demnach liegt kein Skalarprodukt vor.

Zu (ii): Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, folglich ist A nicht positiv definit, damit liegt ebenfalls kein Skalarprodukt vor.

Zu (iii): Es ist $(x, y)_A = \tilde{x}^T A \tilde{y} = (A^* \tilde{x})^T \tilde{y} = \tilde{y}^T A^* \tilde{x} = (\tilde{y}, \tilde{x})_A$ wegen $A = A^*$, folglich ist $(x, y)_A$ symmetrisch. Zum Nachweis der positiven Definitheit sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Vektor und $\tilde{x} = \alpha \tilde{v}_1 + \beta \tilde{v}_2$ eine Darstellung bezüglich der Basis aus Eigenvektoren von A . Dann gilt $(\tilde{x}, \tilde{x})_A = (\alpha \tilde{v}_1 + \beta \tilde{v}_2)^T (\lambda_1 \alpha \tilde{v}_1 + \lambda_2 \beta \tilde{v}_2) = (3 + \sqrt{5})|\alpha|^2 \|\tilde{v}_1\|^2 + (3 - \sqrt{5})|\beta|^2 \|\tilde{v}_2\|^2 > 0$ für $\tilde{x} \neq \vec{0}$, d.h. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0$. Bedingung (2) ist klar. Damit liegt im Fall (iii) ein Skalarprodukt vor.

A4) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^n, & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x^3)}{1 - \cos(x^2)}, \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(e^x + \sin(x))}, & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\ln x) - \ln x}{\ln^3 x}. \end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen Sie bei Teilaufgabe d) eine geeignete Substitution der Variablen.

Lösung.

Zu a) Es gilt $\left(\frac{n-1}{n+3} \right)^n = \left(1 - \frac{4}{n+3} \right)^n = \left(1 - \frac{4}{n+3} \right)^{n+3} \left(1 - \frac{4}{n+3} \right)^{-3}$
 $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-4} \cdot 1 = e^{-4}$, da $\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \rightarrow e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zu b) Mit den Taylorentwicklungen $\sin(y) = y + O(y^3)$ und $\cos(y) = 1 - \frac{1}{2}y^2 + O(y^4)$ folgt

$$\frac{x \sin(x^3)}{1 - \cos(x^2)} = \frac{x(x^3 + O(x^9))}{1 - (1 - \frac{1}{2}x^4 + O(x^6))} = \frac{x^4 + O(x^{10})}{\frac{1}{2}x^4 + O(x^6)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2.$$

Zu c) Mit der Regel von l'Hospital folgt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(e^x + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x + \cos x} = 1.$$

Zu d) Mit der Substitution $y = \ln(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$ sowie der Taylorreihe von $\sin y$ folgt

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\ln x) - \ln x}{\ln^3 x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y) - y}{y^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \frac{1}{6}y^3 + O(y^5)}{y^3} = -\frac{1}{6}.$$

A5) Betrachten Sie die Parameterdarstellung

$$C_1 : \tilde{x}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

einer Schraubenkurve C_1 im $\mathbb{R}^3$, wobei der Parameter t die Zeit bezeichnet.

a) Bestimmen Sie den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor.

b) Zeigen Sie: Für eine zweimal differenzierbare Kurve $C_2 : \tilde{x}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))^T$ im $\mathbb{R}^3$ mit $\tilde{x}(t) \neq \vec{0}$ stehen der Tangenteneinheitsvektor $\tilde{r}(t)$ und dessen Ableitung $\tilde{r}'(t)$ immer senkrecht. Zeigen Sie dann, daß im Fall der Schraubenlinie C_1 auch der Geschwindigkeits- und der Beschleunigungsvektor senkrecht stehen. Gilt dies auch für die allgemeine Kurve C_2 ?

Hinweis: Differenzieren Sie $\|\tilde{r}(t)\|$.

c) Die von $\tilde{r}(t)$ und $\tilde{r}'(t)$ aufgespannte Ebene $E(t)$ heißt *Schmiegeebene* der Kurve im Punkt $\tilde{x}(t)$. Bestimmen Sie für die Schraubenlinie die Matrix M der Projektion auf $E(t)$.

d) Bestimmen Sie für die Schraubenlinie den Beschleunigungsanteil, der senkrecht auf $E(t)$ steht, also aus der Schmiegeebene herausbeschleunigt.

Lösung.

Zu a) Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$, Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t) =$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zu b) Ableiten der Gleichung $\|\vec{r}(t)\|^2 = 1$ nach t liefert $2\langle \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t) \rangle = 0$, also steht $\dot{\vec{r}}(t)$ senkrecht auf $\vec{r}(t)$.

Für die Schraubenlinie C_1 gilt $\langle \vec{v}(t), \vec{a}(t) \rangle = \sin t \cos t - \cos t \sin t + 1 \cdot 0 = 0$.

Für allgemeine Kurven gilt dies nicht; z.B. folgt für $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$ dass $\langle \dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t) \rangle = \sin t \cos t - \cos t \sin t + 2t \cdot 2 = 4t \neq 0$ für $t \neq 0$. Es gilt aber genau dann, wenn $\|\dot{\vec{x}}(t)\|$ konstant ist.

Zu c) Für die Kurve C_1 gilt $\vec{r}(t) = \frac{1}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|} \dot{\vec{x}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\dot{\vec{r}}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Da die Vektoren senkrecht stehen, ist die Projektion auf die von Ihnen aufgespannte Ebene gegeben durch

$$\begin{aligned} P_{E(t)} &= \vec{r}(t) \otimes \vec{r}(t) + \frac{1}{\|\vec{r}(t)\|^2} \dot{\vec{r}}(t) \otimes \dot{\vec{r}}(t) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin^2 t + 2 \cos^2 t & \sin t \cos t & -\sin t \\ \sin t \cos t & \cos^2 t + 2 \sin^2 t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zu d) Wegen $\vec{a}(t) = \sqrt{2} \dot{\vec{r}}(t)$ liegt der Beschleunigungsvektor in der Schmiegeebene. Der Anteil senkrecht zur Schmiegeebene ist daher 0.

A6)

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_{f,4}$ der Funktion

$$f(x) = 1 + x + \int_0^x e^{t^2} dt$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zu Termen der Ordnung 4.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe a) das Taylorpolynom $T_{g,6}$ der Funktion

$$g(x) = 1 + x + \int_0^{x^2} e^{t^2} dt,$$

ebenfalls um den Punkt $x_0 = 0$ bis zu Termen der Ordnung 6.

c) Leiten Sie für das Taylorpolynom aus b) eine Fehlerabschätzung der Form

$$|g(x) - T_{g,6}(x)| \leq C|x|^{10} \text{ für } |x| < 1$$

her. Geben Sie dazu eine zulässige Konstante C an.

Lösung.

Zu a) Wir betrachten zunächst die Funktion $h(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$. Es gilt

$$h'(x) = e^{x^2}, \quad h''(x) = 2xe^{x^2}, \quad h^{(3)}(x) = (4x^2 + 2)e^{x^2} \text{ und } h^{(4)}(x) = (8x^3 + 12x)e^{x^2},$$

also

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 1, \quad h''(0) = 0, \quad h^{(3)}(0) = 2 \text{ und } h^{(4)}(0) = 0.$$

Damit ist die Taylorreihe von h gegeben durch $T_{h,4}(x) = x + \frac{1}{3}x^3$ und diejenige von f ist $T_{f,4}(x) = 1 + 2x + \frac{1}{3}x^3$.

Zu b) Es ist $g(x) = 1 + x + h(x^2)$, damit lautet die Taylorreihe $T_{g,6}(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^6$.

Zu c) Es ist $g(x) - T_{g,6}(x) = h(x^2) - T_{h,3}(x^2)$. Die Restgliedabschätzung lautet somit

$$|g(x) - T_{g,6}(x)| \leq \frac{1}{4!} h^{(4)}(\theta x^2) (x^2)^4 \text{ mit } 0 < \theta < 1.$$

Einsetzen der Abschätzung $|h^{(4)}(y)| \leq 20e^1|y|$, die für $y = \theta x^2 \in (0,1)$ gilt, liefert

$$|g(x) - T_{g,6}(x)| \leq C|x|^{10}$$

mit $C = \frac{20}{4!}e = \frac{5}{6}e$.

A7) Die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad 2x_{n+2} = x_{n+1}x_n + 1 \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq x_n \leq 1$.

b) Die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend.

Hinweis: Schätzen Sie $x_{n+2} - x_{n+1}$ nach unten ab, indem Sie die Rekursionsformel sowohl für x_{n+2} als auch für x_{n+1} verwenden.

c) Die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

d) Berechnen Sie den Grenzwert $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Lösung.

Zu a) Für $0 \leq x_n, x_{n+1} \leq 1$ folgt $0 \leq x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n x_{n+1} + 1) \leq 1$. Die Behauptung folgt also durch Induktion über n .

Zu b) Es ist $x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1}x_n - x_n x_{n-1}) = \frac{x_n}{2}(x_{n+1} - x_{n-1})$. Aus $x_{n+1} \geq x_{n-1}$ folgt wegen $x_n \geq 0$ (siehe Teil a)) dass $x_{n+2} \geq x_{n+1}$. Ferner gilt $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 x_0 + 1) = \frac{1}{2} \geq 0 = x_1$. Durch Induktion über die Aussage $x_{n+2} \geq x_{n+1} \geq x_n$ folgt die Behauptung.

Zu c) Die Folge ist monoton steigend und beschränkt; deshalb ist sie konvergent.

Zu d) Sei $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Grenzübergang $n \rightarrow +\infty$ in der Rekursionsformel liefert $2x = x^2 + 1$, also $x = \pm 1$. Da $x_n \geq 0$ gilt, kann nur $x = +1$ Grenzwert sein.

A8)

a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für welche α ist f stetig? Für welche α ist f in 0 rechtsseitig differenzierbar? Für welche α ist die Ableitung auf dem Intervall $[0, +\infty)$ stetig?

b) Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \frac{\sin(x)(1 - \cos(y))}{x^2 + y^2}$$

stetig fortsetzbar ist in $x_0 = (0,0)^T$.

Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung $1 - \cos(y) \leq \frac{1}{2}y^2$, die für kleine $|y|$ gilt.

Lösung.

Zu a) Für $\alpha > 0$ gilt wegen $|\sin(y)| \leq 1$ dass $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}) = 0$. Für $\alpha < 0$ und $x_k = \frac{1}{2k\pi + \pi/2}$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ und $f(x_k) = x_k^\alpha \rightarrow +\infty$, d.h. die Funktion ist nicht stetig. Für $\alpha = 0$ folgt mit $x_k = \frac{1}{2k\pi + \pi/2}$ dass $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 1 \neq 0$, das bedeutet, die Funktion ist ebenfalls nicht stetig. Insgesamt gilt: f ist stetig für $\alpha > 0$. Damit f im Nullpunkt differenzierbar ist, muss $\frac{f(x)-f(0)}{x} = x^{\alpha-1} \sin(\frac{1}{x})$ für $x \rightarrow 0$ konvergieren. Wie bereits gezeigt wurde, ist dies für $\alpha - 1 > 0$ der Fall, für $\alpha - 1 < 0$ dagegen nicht. Im Fall $\alpha = 1$ hat man für $x_k = \frac{1}{2k\pi + \pi/2}$ Konvergenz gegen 1, für $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ dagegen Konvergenz gegen Null. Die Funktion ist demnach genau dann differenzierbar, wenn $\alpha > 1$ gilt, die Ableitung lautet dann

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin(\frac{1}{x}) - x^{\alpha-2} \cos(\frac{1}{x}) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Es bleibt zu zeigen, ob f' stetig ist. Da $x^{\alpha-1} \sin(\frac{1}{x})$ für $x \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert, genügt es, den zweiten Term $x^{\alpha-2} \cos(\frac{1}{x})$ zu untersuchen. Man zeigt wie oben, daß dieser Term für $x \rightarrow 0$ genau für $\alpha > 2$ gegen 0 konvergiert. Es gilt also: f ist stetig für $\alpha > 0$, differenzierbar für $\alpha > 1$ und stetig differenzierbar für $\alpha > 2$.

Zu b) Es gilt

$$|g(x,y)| \leq \frac{|x| \frac{1}{2} y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ für } (x,y) \rightarrow (0,0).$$

Folglich ist g in $(0,0)^T$ stetig fortsetzbar durch $g(0,0) = 0$.

A9) Ein Beobachter befindet sich im Koordinatenursprung und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ um die z -Achse. Dabei schaut er zur Zeit $t = 0$ in Richtung der x -Achse. Welche Kurve durchläuft für diesen Beobachter ein Punkt, der im festen Koordinatensystem die Kurve $\vec{x}(t) = (t+1, 0, 0)^T$ beschreibt? Bestimmen Sie die Parameterdarstellung dieser Beobachterkurve. Mit welcher Tangentialgeschwindigkeit bewegt sich der Punkt für den Beobachter?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Beobachter die gedrehte kanonische Basis benutzt und führen Sie einen Basiswechsel zu dieser gedrehten Basis im Zeitpunkt t durch.

Lösung.

Wir betrachten der Einfachheit halber nur die Projektionen auf die $x-y$ -Ebene und bezeichnen die Einheitsvektoren durch $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Beobachter benutzt zur Zeit t die gedrehten Basisvektoren $\vec{e}'_1 = T(t)\vec{e}_1$ und $\vec{e}'_2 = T(t)\vec{e}_2$ mit der Transformationsmatrix $T(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ (Matrix einer Drehung um den Winkel t im $\mathbb{R}^2$). Es gilt also

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2 \text{ und } \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = -\sin t \vec{e}_1 + \cos t \vec{e}_2.$$

Für einen Punkt $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2$ gilt

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = x'_1 (\cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2) + x'_2 (-\sin t \vec{e}_1 + \cos t \vec{e}_2),$$

Koeffizientenvergleich liefert $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T(t) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = T^{-1}(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit

$T(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 0 \end{pmatrix}$ hat damit in den gestrichenen

Koordinaten die Darstellung $\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = T^{-1}(t) \begin{pmatrix} 1+t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t) \cos t \\ -(1+t) \sin t \end{pmatrix}$. Der Ge-

schwindigkeitsvektor, den der Beobachter sieht, ist $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}'(t) = \begin{pmatrix} \cos t - (1+t) \sin t \\ -\sin t - (1+t) \cos t \end{pmatrix}$.

(Achtung, ' bedeutet hier nicht die Ableitung!) Der Betrag der Geschwindigkeit ist $v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{1 + (1+t)^2} = \sqrt{2 + 2t + t^2}$.