Mathematik für Ingenieure I+II
ET

0,10

28.4.2000 8:30-11:30

Akad. Dir. Dr. H. Raum

Außer elektronischen Geräten sind alle schriftlichen Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Berechnen Sie für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $\cosh(z) + \sinh(z) = e^{jz} \wedge \mathrm{Im}(z) > 0$ den Betrag und das Argument.

$e^z = e^{jz} \Leftrightarrow z = jz + k\cdot 2\pi j,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow z(1-j) = k 2\pi j,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z = k\pi(-1+j),\ k\in\mathbb{Z}.$

$\{z\in\mathbb{C} \mid e^z = e^{jz},\ \mathrm{Im}(z)>0\} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = k\cdot\sqrt{2}\pi,\ \mathrm{Arg}(z)=\frac{3}{4}\pi,\ k\in\mathbb{N}\}$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Durch
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix}0\\2\\3\\2\end{pmatrix}c_2 + \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}c_3 \ ,\quad (c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3,$$
ist eine Parameterdarstellung eines Teilraumes des $\mathbb{R}^{4\times 1}$ gegeben.
Ermitteln Sie $a_1,a_2,a_3,a_4 \in \mathbb{R}$ so, daß genau dieser Teilraum auch durch
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$
beschrieben wird.

$x \in \mathrm{Bild}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&1\\1&3&1\\1&2&1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&1\\1&3&1\\1&2&1\end{pmatrix}c = x$ nach c lösbar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&x_1\\0&2&1&x_2\\1&3&1&x_3\\1&2&1&x_4\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&x_1-x_2+2x_3-2x_4\\0&0&\boxed{1}&x_2-2x_3+2x_4\\0&\boxed{1}&0&x_3-x_4\\\boxed{1}&2&1&x_4\end{array}\right)$$

$(a_1,a_2,a_3,a_4) = (1, -1, +2, -2)\cdot\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}.$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Ermitteln Sie die Linearkombination f der Funktionen $f_1,\ f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$f_1(x,y) := 2xy - 4 \ ,\ f_2(x,y) := x + y\ ,$$
für die $Q := |f(1,1)|^2 + |f(2,2) - 1|^2 + |f(0,2) + 2|^2$ minimal wird.

$\begin{pmatrix} f_1(1,1) & f_2(1,1)\\ f_1(2,2) & f_2(2,2)\\ f_1(0,2) & f_2(0,2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&2\\4&4\\-4&2\end{pmatrix}$ Siehe I, 12.6.

Normalgleichungen:

$\begin{pmatrix}-2&4&-4\\2&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\4&4\\-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&4&-4\\2&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix}36&4\\4&24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}9&1\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ $\quad c_1 = \frac{18}{53},\ c_2 = -\frac{3}{53}.$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Durch das System der nichtlinearen Gleichungen
$$t^4 + e^{xy} + x^3 = 3 \quad , \quad t^2 + x^4 e^{\sinh y} = 2$$
mit der speziellen Lösung $(\hat t, \hat x, \hat y) := (1,1,0)$ werden C^1-Funktionen $x = x(t)$, $y = y(t)$ festgelegt, die eine Umgebung von $\hat t := 1$ auf eine Umgebung von $(\hat x, \hat y) := (1,0)$ abbilden. Berechnen Sie $x'(1)$.

$4t^3 + e^{xy}(x'\cdot y + x\cdot y') + 3x^2x' = 0,$

$2t + 4x^3\cdot x' e^{\sinh y} + x^4 e^{\sinh y}\cdot\cosh y\cdot y' = 0.$

$3x' + y' = -4$

$4x' + y' = -2$

$x'(1) = \dfrac{\begin{vmatrix}-4&1\\-2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&1\\4&1\end{vmatrix}} = 2.$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Für zwei Basen $(\vec a_1, \vec a_2, \vec a_3)$ und $(\vec b_1, \vec b_2, \vec b_3)$ eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes gelte:
$$\vec b_1 = \vec a_1 + 2\vec a_2 + \vec a_3 \ ,\quad \vec b_2 = \vec a_1 + 2\vec a_2 \ ,\quad \vec b_3 = \vec a_1\ .$$
Ermitteln Sie die auf die Basis $(\vec b_1, \vec b_2, \vec b_3)$ bezogene Koordinatenspalte von
$$\vec x := \vec a_1 + 4\vec a_2 + 3\vec a_3\ .$$

$\vec A := (\vec a_1\ \vec a_2\ \vec a_3)\ ,\quad \vec B := (\vec b_1\ \vec b_2\ \vec b_3)$

$\vec x = \vec A\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\ ,\quad \vec B = \vec A\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$\vec x = \vec B x = \vec A\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}x = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\ ,\quad x = \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}.$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Ermitteln Sie alle $x\in\mathbb{R}$, für die $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n} + \ln n)^{1-x^2}$ konvergiert.

$(\sqrt n + \ln n)^{1-x^2} = (\sqrt n)^{1-x^2}\left(1+\frac{\ln n}{\sqrt n}\right)^{1-x^2}$

$= \frac{1}{n^{\frac{x^2-1}{2}}}\cdot\left(1+\frac{\ln n}{\sqrt n}\right)^{1-x^2}$

Absolut Konvergenz g.d.w. $1 < \frac{x^2-1}{2}$.

Also: $x < -\sqrt3 \ \vee\ \sqrt3 < x$.

Hier: Absolut Konvergenz = Konvergenz.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Begründen Sie, daß zur Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit
$$x_{n+1} := \frac{1}{\sqrt{\cosh(x_n)}} \quad \text{und} \quad x_0 := 0$$
ein Grenzwert $\hat x \in \mathbb{R}_0^+$ existiert.
Ermitteln Sie außerdem ein $N\in\mathbb{N}$ so, daß für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $N \le n$ gilt:
$$|x_n - \hat x| \le \left(\tfrac12\right)^3 .$$

Hinweis: Für alle $x\in\mathbb{R}_0^+$ gilt $|\sinh(x)| \le \cosh(x)$, $1 \le \cosh(x)$.

Fixpunktgleichung: $x = f(x) := (\cosh(x))^{-1/2}$.

$x\in\mathbb{R}_0^+ \Rightarrow f(x)\in\mathbb{R}_0^+$ (abgeschlossen).

$|f'(x)| = \frac12 (\cosh(x))^{-3/2}|\sinh(x)| \le \frac12$,

Es greift der Banach-Fixpunktsatz

$|x_n - \hat x| \le \dfrac{(\frac12)^n}{1-\frac12}|x_0 - x_1| = \left(\frac12\right)^{n-1}$. Setze $N = 4$.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lage und die Art aller Extremalstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) := 4x + 2y$ unter der Restriktion $4x^2 + y^2 \le 1$.

$\nabla f = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.\quad h(x,y) := 4x^2 + y^2 - 1$

$\nabla h = \begin{pmatrix}8x\\2y\end{pmatrix}.\quad \nabla f \ne 0\ \forall (x,y).$

Kein Extrema wenn $h(x,y) < 0$.

$\nabla f + \mu\nabla h = \begin{pmatrix}4+\mu\cdot 8x\\2+\mu\cdot 2y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2\mu},\ y = -\frac{1}{\mu}$

$\mu = \pm\sqrt2 \quad \left(-\frac{1}{2\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)$ Min, $\left(\frac{1}{2\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$ Max